DIGTEC/2021-2022

Jesse op den Brouw

DIGTEC

Vereenvoudigen, Karnaughdiagrammen, multiplexer, FPGA

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Vereenvoudigen

- Het is mogelijk om met behulp van de schakelalgebra functies te bewerken.
- Meestal wordt gezocht naar de eenvoudigste vorm, de vorm die het minste aantal operaties en variabelen bevat.
- Maar het kan ook zijn de vorm wordt gezocht die het eenvoudigst *afbeeldbaar* is op poorten of transistoren op IC’s.
- Voor alsnog wordt de eerste definitie gehanteerd.

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Vereenvoudigen

- Het vereenvoudigen van schakelfuncties is een lastige bezigheid.
- Het vereist kennis van alle wetten en regels.
- Er moet veel ervaring worden opgedaan (lees: oefenen).
- Een slimmere methode is het gebruik van Karnaughdiagrammen.
- In deze slides wordt gebruik gemaakt van de amerikaanse variant (er is ook een variant die in nederlandse boeken wordt gebruikt).

Karnaughdiagrammen

- Oorspronkelijk bedacht door Veitch (1952), later verbeterd door Karnaugh (1953).
- Het is een visueel hulpmiddel om functies te vereenvoudigen.
- Het is een grafische voorstelling van een waarheidstabel, verwant aan *Venn-diagrammen*.
- Levert een *som van producten* (SOP) op.

Karnaughdiagrammen

- Gebaseerd op de veel gebruikte vereenvoudiging:

  $$(term)\cdot\overline{x}+(term)\cdot x = term$$

- Dus bijvoorbeeld $a\cdot b\cdot \overline{c} + a\cdot b\cdot c = a\cdot b$

- Gebaseerd op de veel gebruikte vereenvoudiging (lees de wet van rechts naar links:

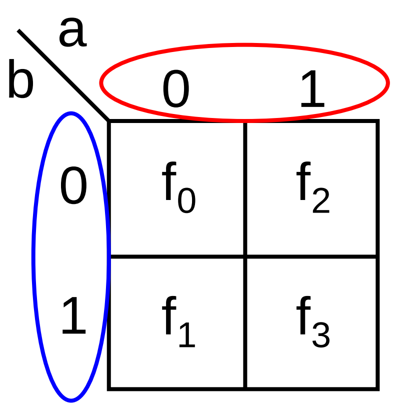
  $$(term)+(term) = term$$

- Dus ook geldt: $a\cdot b\cdot c = a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot c$

Karnaughdiagrammen

- Rechts is gegeven de waarheidstabel en het Karnaughdiagram voor twee variabelen.
- Het Karnaughdiagram bestaat uit hokjes, één voor elke functiewaarde.
- Horizontaal worden de waarden van a bij de hokjes geschreven (rode ovaal).
- Verticaal worden de waarden van b bij de hokjes geschreven (blauwe ovaal).

a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3



DE HAAGSE HOGESCHOOL

Karnaughdiagrammen

- Elk hokje vertegenwoordigt dus een samenstelling van a en b (*minterm*).
- Horizontaal en vertikaal geplaatste hokjes verschillen precies in één variabele.
- De functies van a en b:

$$a = \sum m(2,3) \qquad \overline{a} = \sum m(0,1)$$

$$b = \sum m(1,3) \qquad \overline{b} = \sum m(0,2)$$

a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

b \ a	0	1
0	f_0	f_2
1	f_1	f_3

Voorbeeld met twee variabelen

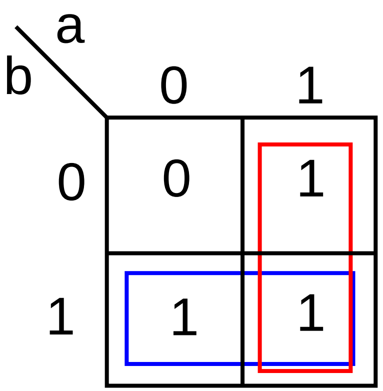
- Rechts is een waarheidstabel van een functie gegeven.
- (Dit is natuurlijk de functie van een OR).
- Het invullen gaat als volgt. Begin bij f_0 en werk door naar f_3. Het resultaat is een z- of n-patroon.

a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	1

Voorbeeld met twee variabelen

- Nu kan de functie gevonden worden.
- Omrand de 1-en die bij a horen.
- Omrand de 1-en die bij b horen.
- De functie is $s = a + b$
- Merk op dat één functiewaarde (minterm) twee keer omrand is.



Met drie variabelen

- Hieronder is een waarheidstabel en een Karnaughdiagram gegeven voor drie variabelen. Merk op dat aangrenzende mintermen in slechts één variabele verschillen.

a	b	c	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

aangrenzend

c \ ab (s)	00	01	11	10
0	f_0	f_2	f_6	f_4
1	f_1	f_3	f_7	f_5

Met drie variabelen

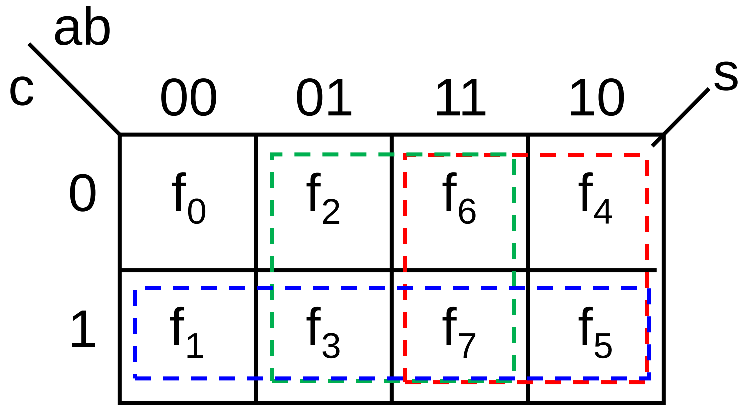
- Het gebieden van a en b wordt nu uitgebreid en komt een nieuwe variabele c bij.

- Let ook op de verdeling van de functiewaarden.

- Het rode gebied is waar a logisch 1 is.

- Het groene gebied is waar b logisch 1 is.

- Het blauwe gebied is waar c logisch 1 is.



Met drie variabelen

- Het invullen gaat eenvoudig. Voor functiewaarden f_0 t/m f_3 is dat hetzelfde als bij twee variabelen.
- Functiewaarden f_4 t/m f_7 moeten gespiegeld worden ingevuld.
- Merk op dat de linkerrand (f_0, f_1) vastzit aan de rechterrand (f_4, f_5).
- Dit is een van de eigenaardigheden van Karnaughdiagrammen.

c \ ab	00	01	11	10
0	f_0	f_2	f_6	f_4
1	f_1	f_3	f_7	f_5

s

$$(f_0, f_4) = \overline{b} \cdot \overline{c}$$

$$(f_1, f_5) = \overline{b} \cdot c$$

Voorbeeld met drie variabelen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram gegeven voor een functie.

- De 1 bij f_3 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.

- De 1 bij f_5 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.

- De 1 bij f_6 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.

s

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Voorbeeld met drie variabelen

- De omranding is als volgt:
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De rode omranding levert $b \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

s

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Voorbeeld met drie variabelen

- Gegeven het Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\overline{a} \cdot \overline{b}$
- De groene omranding levert $b \cdot \overline{c}$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De totale functie is $s = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c + b \cdot \overline{c}$

s

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

Voorbeeld met drie variabelen

- Gegeven hetzelfde Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\bar{a} \cdot \bar{c}$
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $\bar{b} \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c$

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

s

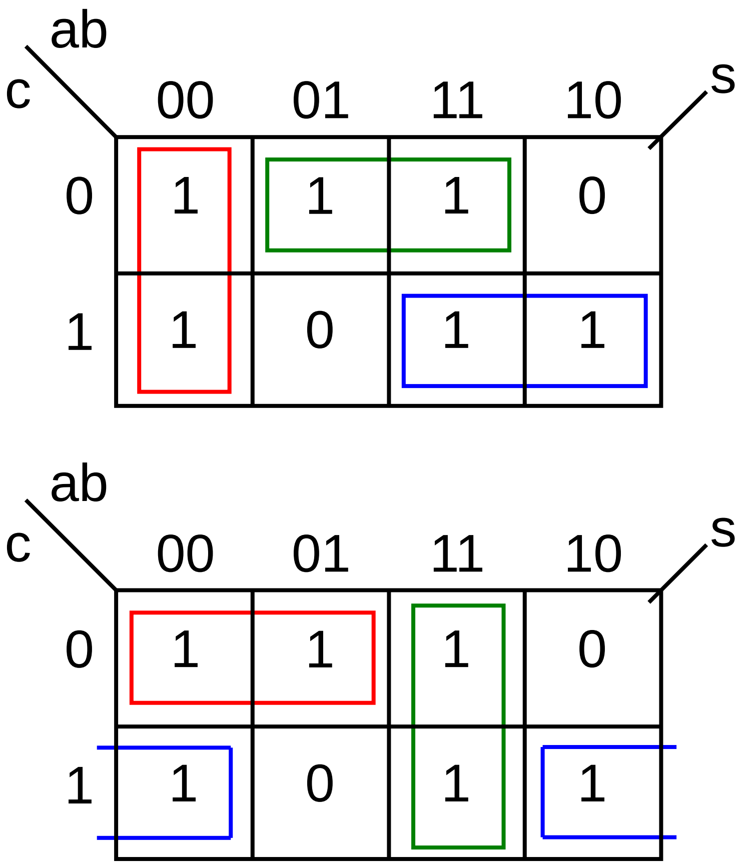
Voorbeeld met drie variabelen

- Dus deze twee oplossingen geven beide de eenvoudigste functie.

- Het geheel kan als volgt genoteerd worden:

$$s = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b} + a\cdot c + \overline{c}\cdot b}{a\cdot b + \overline{a}\cdot\overline{c} + c\cdot\overline{b}}$$

- In de praktijk wordt één van de twee functies gekozen.

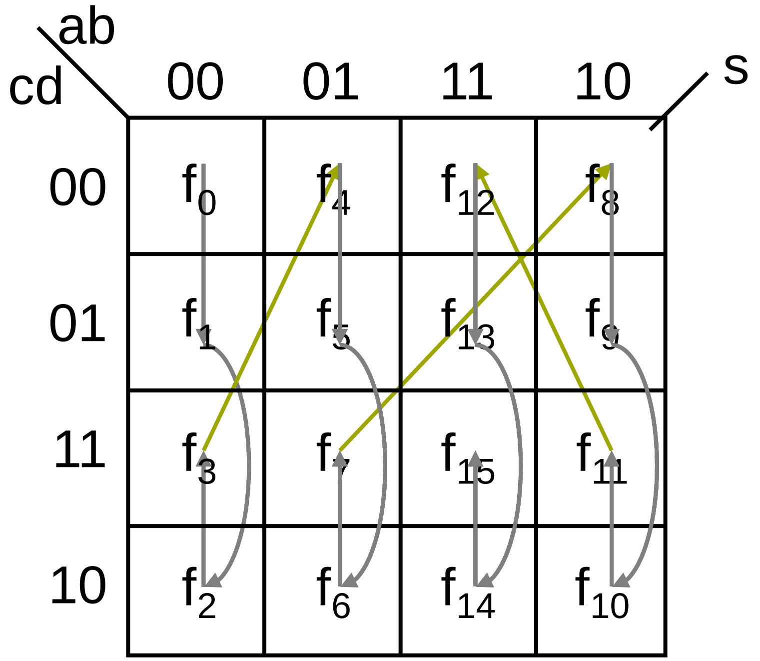


Met vier variabelen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram voor vier variabelen gegeven.

- Let op de verdeling van de functiewaarden

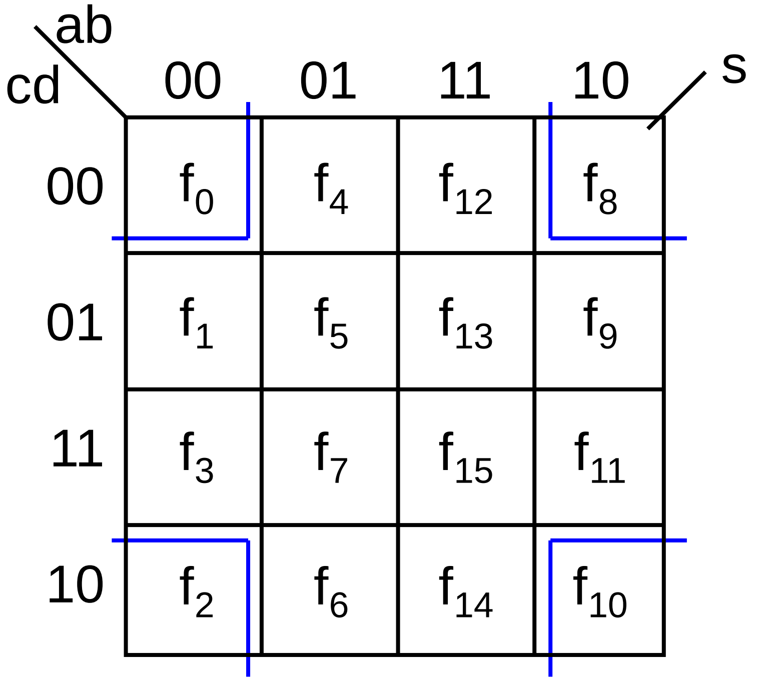
a	b	c	d	s
0	0	0	0	f_0
0	0	0	1	f_1
0	0	1	0	f_2
0	0	1	1	f_3
0	1	0	0	f_4
0	1	0	1	f_5
0	1	1	0	f_6
0	1	1	1	f_7
1	0	0	0	f_8
1	0	0	1	f_9
1	0	1	0	f_{10}
1	0	1	1	f_{11}
1	1	0	0	f_{12}
1	1	0	1	f_{13}
1	1	1	0	f_{14}
1	1	1	1	f_{15}



Karnaughdiagrammen

- Let op dat de bovenrand ‘vast zit’ aan de onderrand en dat de linkerrand ‘vast zit’ aan de rechterrand (het is eigenlijk een *torus*).
- Hieruit volgt dat de hoekpunten aan elkaar vastzitten.
- Dus:

$$
\begin{aligned}
(f_0, f_2, f_8, f_{10}) &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} \\
&= (\overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c + a \cdot \overline{c} + a \cdot c) \cdot \overline{b} \cdot \overline{d} \\
&= \overline{b} \cdot \overline{d}
\end{aligned}
$$



Karnaughdiagrammen

- Gegeven het Karnaughdiagram aan de rechterkant.
- Voor het uitwerken van de functie zijn vier termen nodig.
- De functie is:

$$s = c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

s

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	1

BCD-carry

- Een BCD-cijfer wordt weergegeven met vier bits. Tien combinaties worden gebruikt, zes combinaties niet.

- We willen nu een functie bepalen die aangeeft dat het BCD-cijfer de waarde 9 heeft.

- De functie MOET een logische 1 geven als combinatie 1001 (minterm 9) wordt aangeboden. Bij combinaties 0000 t/m 1000 MOET een 0 worden gegeven.

- Aangezien de combinaties 1010 t/m 1111 niet voorkomen, kunnen deze ingevuld worden als don’t care.

- In verkorte notatie: $is9 = \sum m(9) + d(10,11,12,13,14,15)$

DE HAAGSE HOGESCHOOL

BCD-carry

- Gegeven het Karnaughdiagram voor de is-9-detector aan de rechterkant.

- Er is slechts één 1, omringd door don’t cares.

- De functie is logisch 1 waar s_3 is logisch 1 en s_0 is logisch 1 dus:

$$is9 = s_3 \cdot s_0$$

- De don’t cares binnen de omranding zijn na uitwerken 1 geworden. De don’t cares buiten de omranding zijn na uitwerken 0 geworden.

is9

s_1s_0 \ s_3s_2	00	01	11	10
00	0	0	-	0
01	0	0	-	1
11	0	0	-	-
10	0	0	-	-

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Regels

- Regels voor het oplossen van Karnaughdiagrammen:
- Zo weinig mogelijke groepen 1-en maken.
- Zo groot mogelijke groepen 1-en maken.
- Altijd groepen 1-en bij elkaar nemen in machten van 2 (1, 2, 4, 8, etc).
- Groepen moeten alleen rechthoeken en vierkanten vormen.
- Groepen mogen elkaar overlappen.

Regels

- Echter:
- Begin met ‘zielige ééntjes’ (1-en die omringd worden door 0-en).
- En:
- Diagonaal geplaatste 1-en kunnen niet samengenomen worden (EXOR !).
- Don’t cares kunnen meegenomen worden in de omrandingen als de schakelfunctie hierdoor eenvoudiger wordt.
- Geen groepen met alleen don’t cares!

Multiplexer

- Een multiplexer is een digitale component die data op één van de data-ingangen doorgeeft aan de data-uitgang onder besturing van één of meerdere besturingsingangen.

- Deze component wordt gebruikt wanneer verschillende bronnen data kunnen leveren aan één doel.

- De multiplexer komt voor in onder andere microprocessors en routers.

- Aan bod komen een 2x1-, een 4x1- en een 8x1 multiplexer.

- Multiplexers spelen een belangrijke rol bij *FPGA’s.*

Multiplexer

- Eerst de 2x1-multiplexer. Hiernaast is de waarheidstabel gegeven.
- De uitgang volgt i_0 als s=0 en volgt i_1 als s=1.
- Invullen in een Karnaughdiagram en functie uitwerken:

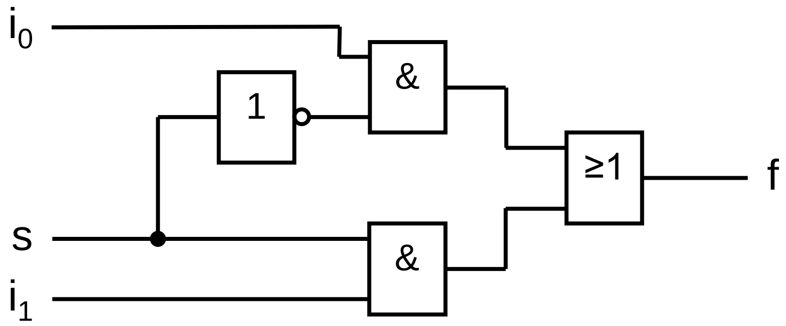
i_0 \ si_1 (f)	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

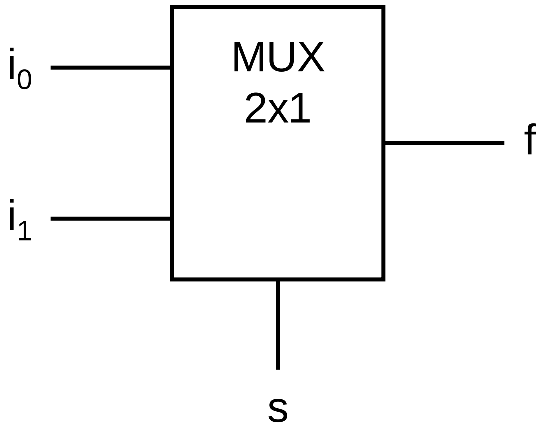
$$f = \bar{s} \cdot i_0 + s \cdot i_1$$

s	i_1	i_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Multiplexer

- Het schema van de 2x1-multiplexer





Multiplexer

- Een 2x1-multiplexer heeft drie ingangen: één besturingsingang en twee data-ingangen.

- Een 4x1- multiplexer heeft twee besturingsingangen en vier data-ingangen.

- Een 8x1- multiplexer heeft drie besturingsingangen en acht data-ingangen.

- Het opstellen van een waarheidstabel voor een 4x1- en een 8x1-multiplexer levert veel problemen op.

Multiplexer

- De structuur van een multiplexer is echter erg eenvoudig.
- Handiger is om een functietabel op te stellen. Hierin worden niet de uitgangen in 0-en en 1-en beschreven, maar komt de functie te staan:

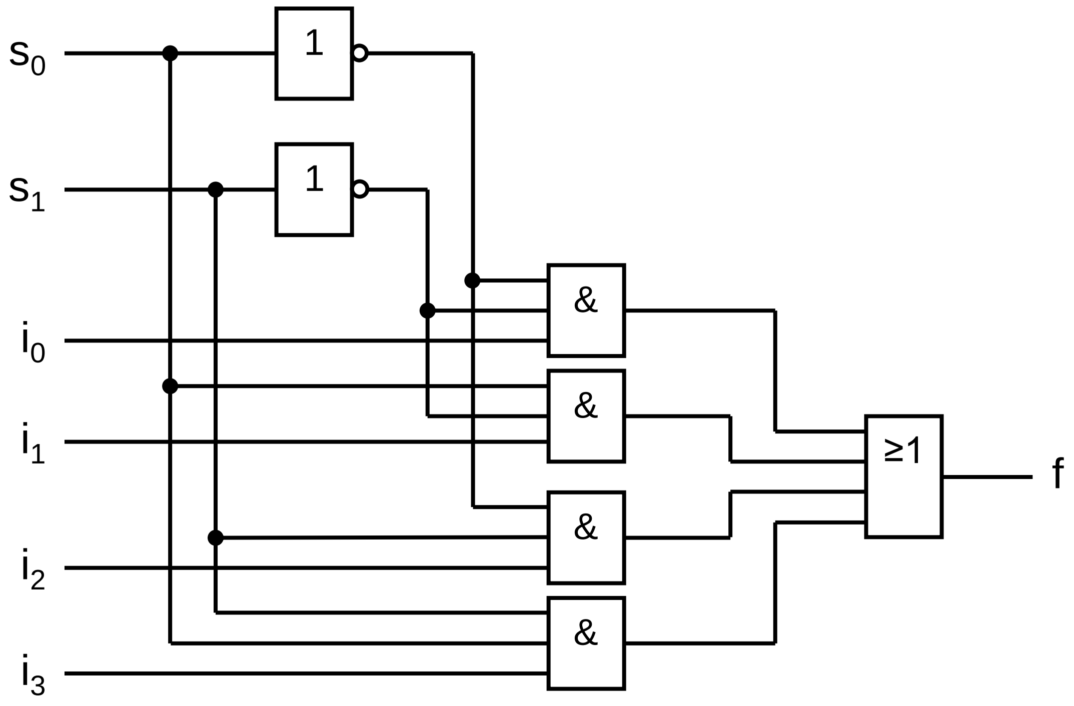
s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

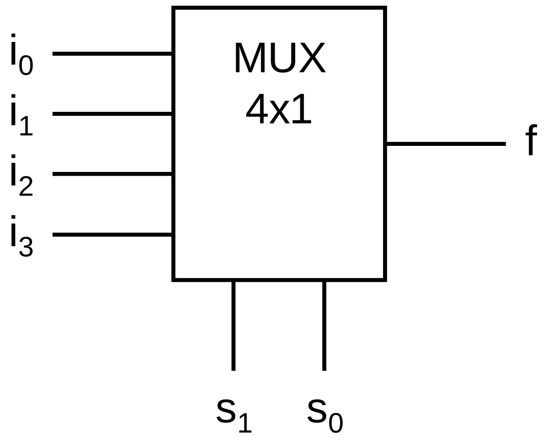
De functie is:

$$f = \overline{s_1} \cdot \overline{s_0} \cdot i_0 + \overline{s_1} \cdot s_0 \cdot i_1 + s_1 \cdot \overline{s_0} \cdot i_2 + s_1 \cdot s_0 \cdot i_3$$

Multiplexer

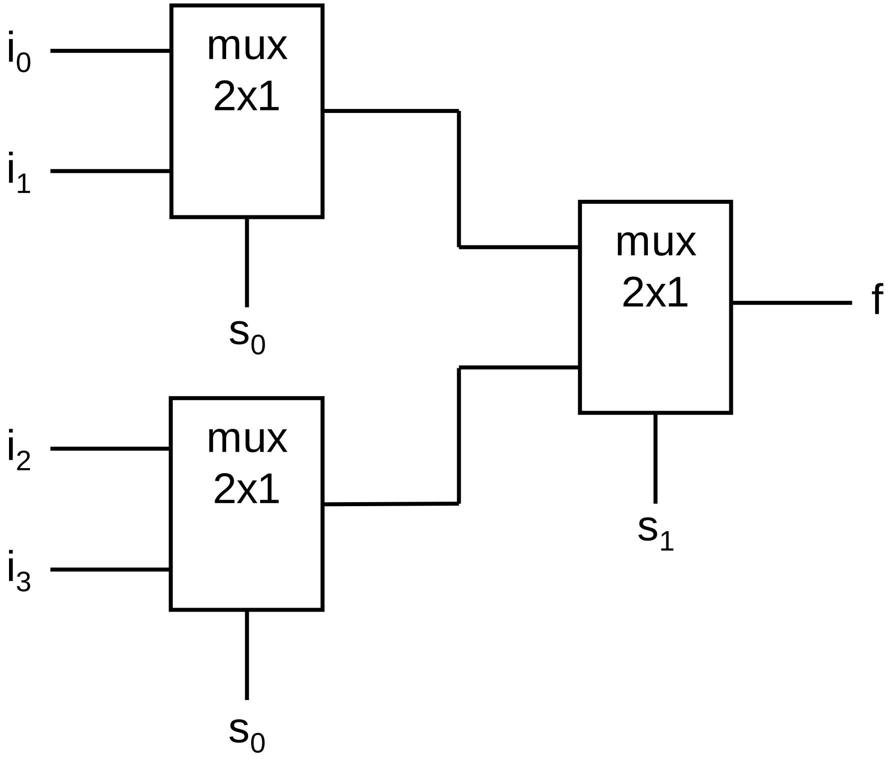
Het schema van een 4x1 multiplexer:





Multiplexer

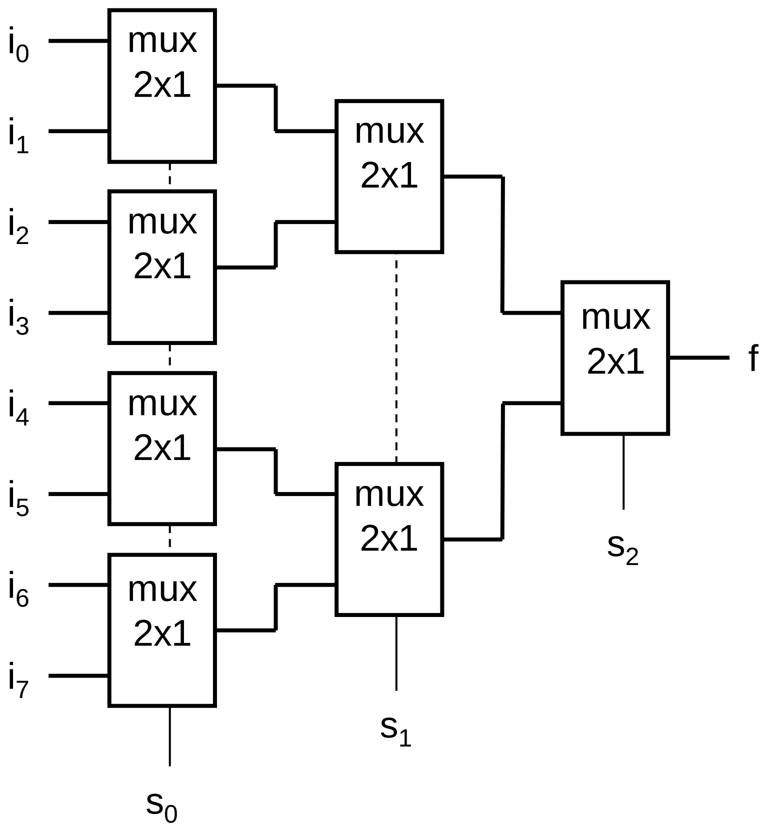
- Slimmer is de structuur van de 2x1-multiplexer te gebruiken:



s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

Multiplexer

- En nu een 8x1-multiplexer

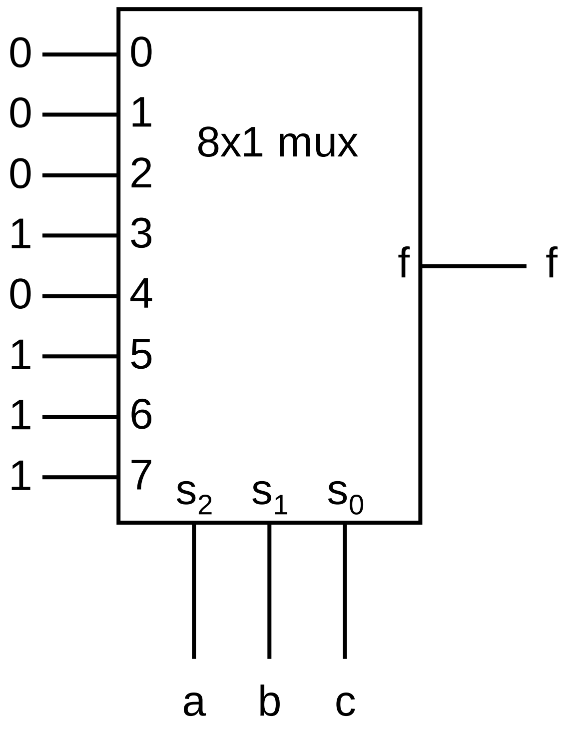


s_2	s_1	s_0	f
0	0	0	i_0
0	0	1	i_1
0	1	0	i_2
0	1	1	i_3
1	0	0	i_4
1	0	1	i_5
1	1	0	i_6
1	1	1	i_7

Functie met behulp van een multiplexer

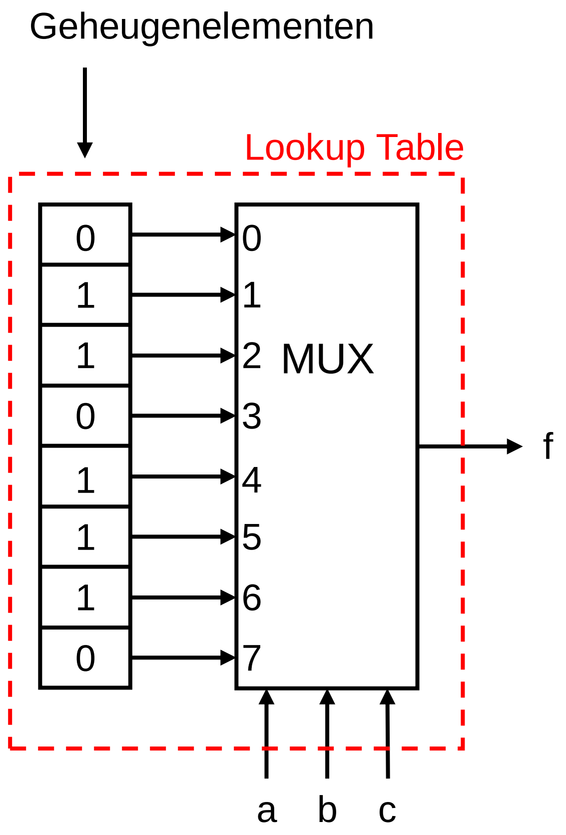
- Een multiplexer kan gebruikt worden om een logische schakeling te maken (denk aan de *som van mintermen*).

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



FPGA

- Deze techniek wordt gebruikt in de Field Programmable Gate Array (FPGA).
- De data-ingangen worden voorzien van geheugenelementen die door de gebruiker in te stellen zijn.
- Bij het programmeren worden de geheugenelementen geladen met de juiste waarden.
- Het geheel wordt een Lookup Table (LUT) genoemd.



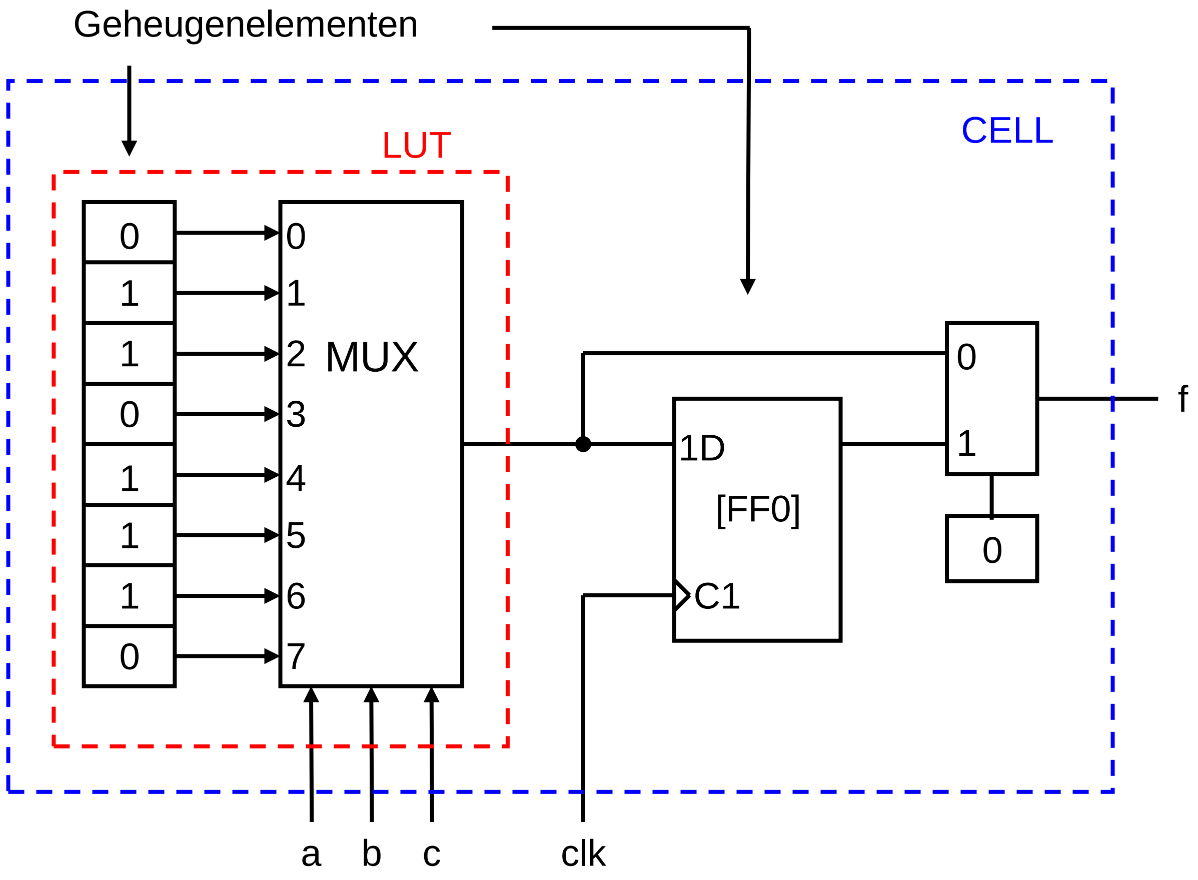
$$f_{a,b,c} = \sum(m_1, m_2, m_4, m_5, m_6)$$

FPGA

- De Lookup Table wordt nog uitgebreid met een geheugenelement zodat synchrone schakelingen gerealiseerd kunnen worden.

- Het geheel wordt een *cell* genoemd.

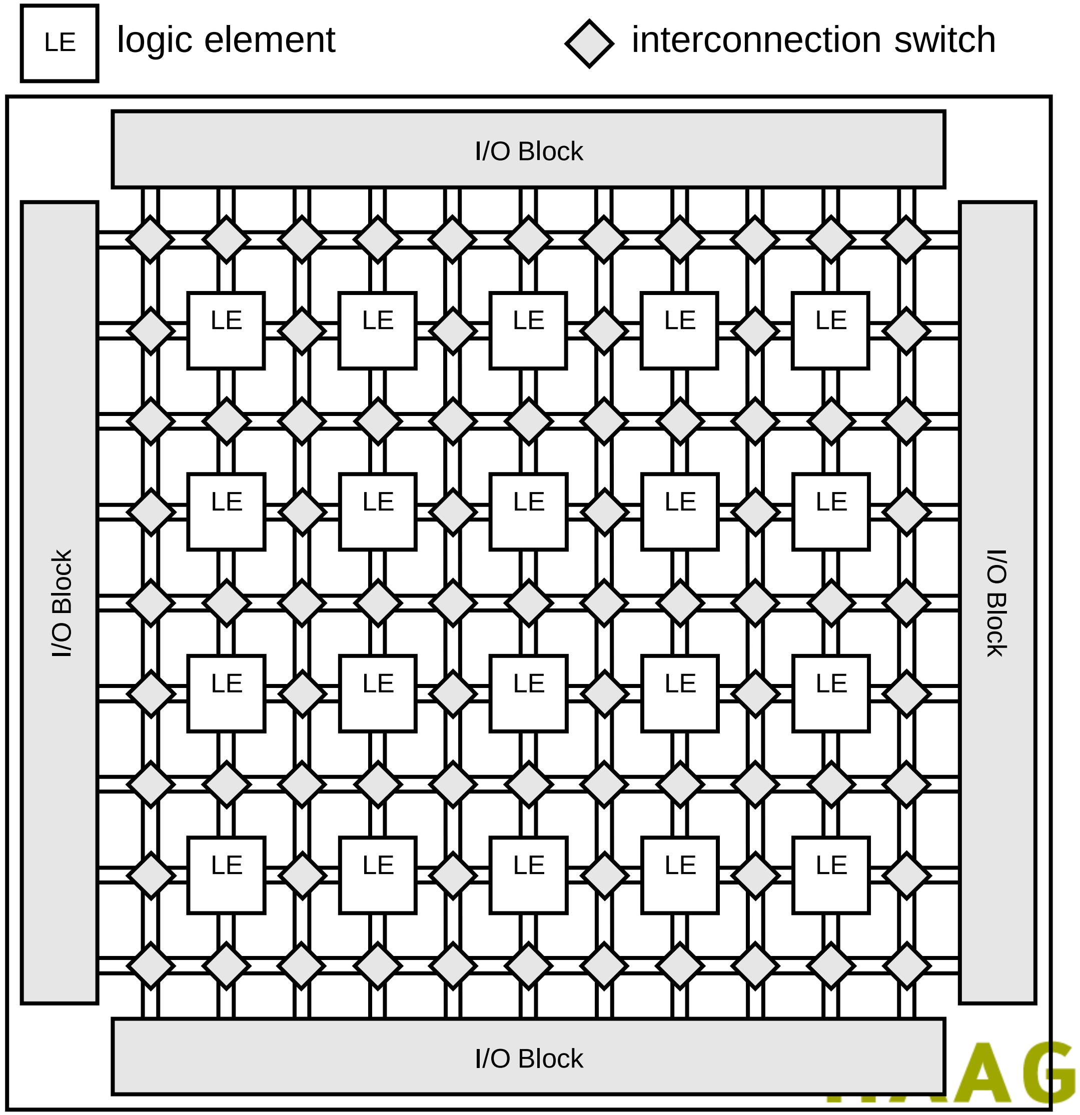
- Meestal met 4 stuuringangen en 16 dataingangen.



DE HAAGSE HOGESCHOOL

FPGA

- Een FPGA bestaat uit meerdere van deze cellen die onderling verbonden zijn via *interconnects*.
- De kruispunten van deze interconnects zijn te programmeren.
- De I/O blocks regelen de verbinding tussen de *core* en de buitenwereld.



HAAGSE HOGESCHOOL

let's change