



Academie voor Technology, Innovation &
Society Delft
Academie voor ICT & Media

Inleiding Digitale Techniek

Week 3 – Schakelalgebra, waarheidstabellen, Karnaugh, (de)mux
Jesse op den Brouw
INLDIG/2018-2019

HAAGSE
HOGESCHOOL

Schakelalgebra

- Schakelalgebra is de wiskunde waarmee digitale schakelingen ontworpen kunnen worden.
- Het is gebaseerd op de Boole-algebra (Boole, 1854) en is dus ruim 150 jaar oud.
- Boole onderzocht de wiskunde van verzamelingen.
- In 1937 toonde Shannon* aan dat de *tweewaardige* Boole-algebra gebruikt kon worden bij het analyseren en ontwerpen van contactschakelingen (relais).
- * “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”

Schakelalgebra

- De schakelalgebra bestaat uit:
- Variabelen: $a, Z, X, \text{open1}, \dots$
- Constanten: $0, 1$
- Operatoren
 - $=$ (is gelijk aan)
 - \cdot (AND)
 - $+$ (OR),
 - $\bar{\quad}$ (NOT, *overbar*)
- Haakjes: $(\)$ of $\{ \}$ of $[\]$

Schakelalgebra

- Bij specificaties van digitale schakelingen wordt gebruik gemaakt van *proposities*.
- Een propositie is een bewering of uitspraak die alleen met 'waar' of 'niet waar' kan worden beantwoord.
- 'waar' wordt weergegeven door 1 en 'niet waar' wordt weergegeven door 0. Dit zijn de waarheidswaarden van de schakelalgebra.

Schakelalgebra

- Een propositie kan zijn:

A: de temperatuur is hoger dan 25° C.

- Een andere is:

B: het is droog.

- Het kan zijn dat het 30° C is en het is niet droog. A is dan gelijk aan 1 en B is gelijk aan 0.

Schakelalgebra

- Zo kan geschreven worden

A: de temperatuur is hoger dan 25° C.

als

$A = 1$ (als de temperatuur is hoger dan 25° C)

De andere:

B: het is droog.

als

$B = 0$ (als het regent)

- A en B worden logische variabelen of kortweg variabelen genoemd.

Schakelalgebra

- De schakelalgebra is gebaseerd op de volgende rekenregels voor constanten:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

- Daarnaast geldt:

$$x = 0 \text{ als } x \neq 1$$

$$x = 1 \text{ als } x \neq 0$$

nb: dit zijn de *axioma's* (niet te bewijzen grondstelling) van de schakelalgebra.

Schakelalgebra

- Hoe wordt de volgende functie uitgewerkt?

$$s = a \cdot (b + \bar{c})$$

- Prioriteitsvolgorde:

Haakjes

NOT

AND

OR

Schakelalgebra

- Dus:

$$s = a \cdot (b + \bar{c})$$

- Eerst \bar{c} uitwerken
- dan b met de uitkomst van boven uitwerken ($b + \bar{c}$)
- daarna a met de uitkomst van boven uitwerken ($a \cdot (b + \bar{c})$)

- Gegeven dat $a=1$, $b=0$ en $c=0$ dan is de uitkomst

$$\bar{c} = 1$$

$$b + \bar{c} = 0 + 1 = 1$$

$$a \cdot (b + \bar{c}) = 1 \cdot (1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Opgaven

- Gegeven dat $a=1$, $b=0$ en $c=0$. Werk de volgende functies uit. De waarde van d is niet gegeven.

$$s = (a + b) \cdot (\bar{b} + c)$$

$$s = \overline{(a + b) \cdot (c + d)}$$

$$s = \bar{b} \cdot (c + d \cdot (c + a))$$

Schakelalgebra

- Om de schakelalgebra enige meerwaarde te geven zijn er nog al wat *theorema's**):

Commutatieve wetten

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Associatieve wetten

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Distributieve wetten

$$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$$

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$

*) stelling of uitspraak die af te leiden is met behulp van een verzameling axioma's en reeds eerder afgeleide stellingen

Schakelalgebra

Gelijkheidswetten

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

Moduluswetten

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

Negatiewetten

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

=

$$x = x$$

Schakelalgebra

Absorptiewetten

$$x + x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + \bar{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$$

$$x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$$

Schakelalgebra

De Morgan

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

Substitutie

$$a \cdot b + c \cdot d \rightarrow x + y = \overline{\overline{x \cdot y}} \rightarrow \overline{\overline{a \cdot b \cdot c \cdot d}}$$

Noot over NOT

- In boeken en computertalen worden verschillende varianten van NOT gebruikt.

Overbar $\bar{\quad}$

Prime $'$

Negation \neg

Bang $!$

- Voorbeelden

$$x' \cdot y' + x \cdot y = (x' \cdot y + x \cdot y')'$$

$$\neg x \wedge \neg y \equiv \neg(x \vee y)$$

Waarheidstabel

- De meest basale weergave van een logische functie is de waarheidstabel.
- Gegeven is de algemene opbouw van een waarheidstabel, in dit geval voor drie variabelen.
- De rijen zijn volgens de normale binaire telcode oplopend genummerd.
- De variabelen f_0 t/m f_7 zijn de bijbehorende functiewaarden.

x	y	z	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Waarheidstabel

- Elke regel levert een bijdrage aan de functie.
- De eerste regel leest als volgt:

$$s = f_0 \text{ als } x = 0, y = 0, z = 0$$

- De bijdrage van deze regel aan de functie is:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot f_0$$

- De overige regels op vergelijkbare wijze.

x	y	z	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Minterm

- De functie kan geschreven worden als:

$$s = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot f_0 + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot f_1 + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot f_2 + \bar{x} \cdot y \cdot z \cdot f_3 + \\ x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot f_4 + x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot f_5 + x \cdot y \cdot \bar{z} \cdot f_6 + x \cdot y \cdot z \cdot f_7$$

- De termen $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ t/m $x \cdot y \cdot z$ worden *mintermen* genoemd.
- Mintermen zijn producttermen waarin alle variabelen of een inverse (maar niet beide tegelijkertijd) voorkomen.

Som van mintermen

- Mintermen worden doorgaans afgekort door een m met een index.
- Zo is de minterm die hoort bij $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ gelijk aan m_0 en $x \cdot y \cdot z$ gelijk aan m_7 .
- De functie kan dus ook geschreven worden als:

$$s = m_0 \cdot f_0 + m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + m_3 \cdot f_3 + m_4 \cdot f_4 + m_5 \cdot f_5 + m_6 \cdot f_6 + m_7 \cdot f_7$$

- De vorm van deze functie wordt de *som van mintermen* genoemd. Dit is één van de twee *standaardvormen*.

Standaardvorm

- Gegeven is de waarheidstabel rechts.
- De functie kan geschreven worden als:

$$s = m_0 \cdot 0 + m_1 \cdot 1 + \dots + m_6 \cdot 1 + m_7 \cdot 1$$

- Of gewoon:

$$s = m_1 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

- Of nog sneller:

$$s = \sum m(1,3,5,6,7)$$

x	y	z	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Maxterm

- De functie kan geschreven worden als:

$$s = (x + y + z + f_0) \cdot (x + y + \bar{z} + f_1) \cdot (x + \bar{y} + z + f_2) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z} + f_3) + \\ (\bar{x} + y + z + f_4) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z} + f_5) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + z + f_6) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + f_7)$$

- De termen $x + y + z$ t/m $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ worden *maxtermen* genoemd.
- Maxtermen zijn somtermen waarin alle variabelen of een inverse (maar niet beide tegelijkertijd) voorkomen.

Product van maxtermen

- Maxtermen worden doorgaans afgekort door een M met een index.
- Zo is de maxterm die hoort bij $x + y + z$ gelijk aan M_0 en $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ gelijk aan M_7 .
- De functie kan dus ook geschreven worden als:

$$s = (M_0 + f_0) \cdot (M_1 + f_1) \cdot (M_2 + f_2) \cdot (M_3 + f_3) \cdot \\ (M_4 + f_4) \cdot (M_5 + f_5) \cdot (M_6 + f_6) \cdot (M_7 + f_7)$$

- De vorm van deze functie wordt de *product van maxtermen* genoemd. Dit is één van de twee *standaardvormen*.

Standaardvorm

- Gegeven is de waarheidstabel rechts.

- De functie kan geschreven worden als:

$$s = (M_0 + 0) \cdot (M_1 + 1) \cdot \dots \cdot (M_6 + 1) \cdot (M_7 + 1)$$

- Of gewoon:

$$s = M_0 \cdot M_2 \cdot M_4$$

- Of nog sneller:

$$s = \prod M(0,2,4)$$

x	y	z	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Verband minterm en maxterm

- Met behulp van de stellingen van De Morgan is aan te tonen dat mintermen en maxtermen aan elkaar verwant zijn. Als voorbeeld een functie met twee variabelen:

$$s = m_0 \cdot f_0 + m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + m_3 \cdot f_3$$

- De inversie functie kan eenvoudig gemaakt worden door alle functiewaarden te inverteren:

$$\bar{s} = m_0 \cdot \bar{f}_0 + m_1 \cdot \bar{f}_1 + m_2 \cdot \bar{f}_2 + m_3 \cdot \bar{f}_3$$

- Natuurlijk geldt: $s = \bar{\bar{s}}$

Verband minterm en maxterm

- Door De Morgan twee keer toe te passen krijgen we:

$$\begin{aligned} s &= \overline{m_0 \cdot \bar{f}_0 + m_1 \cdot \bar{f}_1 + m_2 \cdot \bar{f}_2 + m_3 \cdot \bar{f}_3} = \\ &= \overline{m_0 \cdot \bar{f}_0} \cdot \overline{m_1 \cdot \bar{f}_1} \cdot \overline{m_2 \cdot \bar{f}_2} \cdot \overline{m_3 \cdot \bar{f}_3} = \\ &= (\overline{m_0} + f_0) \cdot (\overline{m_1} + f_1) \cdot (\overline{m_2} + f_2) \cdot (\overline{m_3} + f_3) = \\ &= (M_0 + f_0) \cdot (M_1 + f_1) \cdot (M_2 + f_2) \cdot (M_3 + f_3) \end{aligned}$$

- Hieruit volgt dat:

$$m_0 = \overline{M_0} \quad \dots \quad m_3 = \overline{M_3}$$

Don't care

- Het kan zijn dat bepaalde functiewaarden niet gespecificeerd zijn. Zo'n functiewaarde heet *don't care*.
- Don't cares komen voort uit het feit dat bepaalde uitgangswaarden niet interessant zijn.
- Don't cares komen voort uit het feit dat bepaalde ingangscombinaties nooit voorkomen (can't happen).
- Don't cares worden weergegeven door een – (minus). Andere representaties: x, d

Don't care

- Gegeven onderstaande waarheidstabel.
- De functie wordt als volgt genoteerd:

$$s = \sum m(2,3) + d(1)$$

- Don't cares bestaan alleen bij de specificatie van een functie, niet bij de realisatie van een functie.
- Bij realisatie worden ze omgezet in een 0 of 1.

x	y	s
0	0	0
0	1	-
1	0	1
1	1	1

Opgaven

- Laat zien dat de regel $x + x \cdot y = x$ klopt.
- Laat zien dat de regel $x + \bar{x} \cdot y = x + y$ klopt.
- Gegeven de functie: $s = x \cdot (y + z \cdot \bar{y}) + z \cdot y$
Bepaal de mintermvorm van deze functie.
Bepaal de waarheidstabel van deze functie.
- Gegeven een functie van drie variabelen waarvoor geldt dat de functie voor $xyz = 000$ en $xyz = 111$ don't care is en dat de functie een 1 geeft als $x = 0$ terwijl $z = 1$. Geef de waarheidstabel.

Vereenvoudigen

- Het is mogelijk om met behulp van de schakelalgebra functies te bewerken.
- Meestal wordt gezocht naar de eenvoudigste vorm, de vorm die het minste aantal operaties en variabelen bevat.
- Maar het kan ook zijn de vorm wordt gezocht die het eenvoudigst *afbeeldbaar* is op poorten of transistoren op IC's.
- Voor alsnog wordt de eerste definitie gehanteerd.

Vereenvoudigen

- Als voorbeeld wordt de volgende functie vereenvoudigd:

$$s = x \cdot \bar{y} + x \cdot y + \bar{x} \cdot y$$

$$s = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + x \cdot y$$

$$s = \bar{x} \cdot y + x \cdot (\bar{y} + y)$$

$$s = \bar{x} \cdot y + x \cdot 1$$

$$s = \bar{x} \cdot y + x$$

$$s = x + \bar{x} \cdot y$$

$$s = x + y$$

De functie

Commutatieve wet

Distributieve wet

Negatiewet

Moduluswet

Commutatieve wet

Absorbtiewet

Vereenvoudigen

- Door een extra term toe te voegen gaat het makkelijker:

$$s = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$$

$$s = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

$$s = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

$$s = (\overline{x} + x) \cdot y + x \cdot (\overline{y} + y)$$

$$s = 1 \cdot y + x \cdot 1$$

$$s = y + x$$

$$s = x + y$$

De functie

Gelijkheidswet

Commutatieve wet

Distributieve wet

Negatiewet

Moduluswet

Commutatieve wet

Karnaughdiagrammen

- Het vereenvoudigen van schakelfuncties is een lastige bezigheid.
- Het vereist kennis van alle wetten en regels.
- Er moet veel ervaring worden opgedaan (lees: oefenen).
- Een slimmere methode is het gebruik van Karnaughdiagrammen.
- In deze slides wordt gebruik gemaakt van de Amerikaanse variant (er is ook een variant die in nederlandse boeken wordt gebruikt).

Karnaughdiagrammen

- Oorspronkelijk bedacht door Veitch (1952), later verbeterd door Karnaugh (1953).
- Het is een visueel hulpmiddel om functies te vereenvoudigen.
- Het is een grafische voorstelling van een waarheidstabel, verwant aan *Venn-diagrammen*.
- Gebaseerd op de veel gebruikte vereenvoudigingen:

$$(term) \cdot \bar{x} + (term) \cdot x = term$$

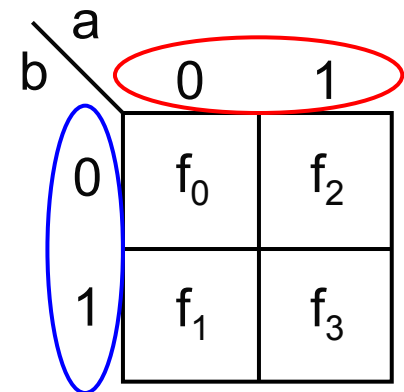
$$(term) + (term) = term$$

- Levert een *som van producten* op.

Twee variabelen

- Rechts is gegeven de waarheidstabel en het Karnaughdiagram voor twee variabelen.
- Het Karnaughdiagram bestaat uit hokjes, één voor elke functiewaarde.
- Horizontaal worden de waarden van a bij de hokjes geschreven (rode ovaal).
- Vertikaal worden de waarden van b bij de hokjes geschreven (blauwe ovaal).

a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3



Twee variabelen

- Elk hokje vertegenwoordigt dus een samenstelling van a en b (*minterm*).
- Horizontaal en vertikaal geplaatste hokjes verschillen precies in één variabele.
- De functies van a en b:

$$a = \sum m(2,3)$$

$$b = \sum m(1,3)$$

$$\bar{a} = \sum m(0,1)$$

$$\bar{b} = \sum m(0,2)$$

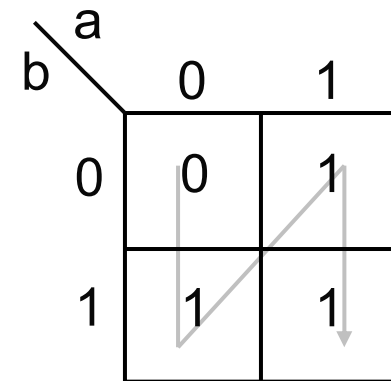
a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

		a	
		0	1
b	0	f_0	f_2
	1	f_1	f_3

Voorbeeld met twee variabelen

- Rechts is een waarheidstabel van een functie gegeven.
- (Dit is natuurlijk de functie van een OR).
- Het invullen gaat als volgt. Begin bij f_0 en werk door naar f_3 . Het resultaat is een z-patroon.

a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Voorbeeld met twee variabelen

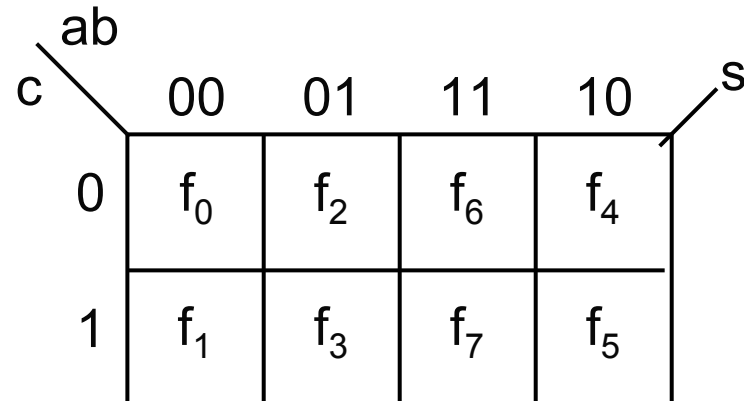
- Nu kunnen a en b gevonden worden.
- Omrand de 1-en die bij a horen.
- Omrand de 1-en die bij b horen.
- De functie is $s = a + b$
- Merk op dat één functiewaarde (minterm) twee keer omrand is.

		a	
		0	1
b	0	0	1
	1	1	1

Karnaughdiagrammen

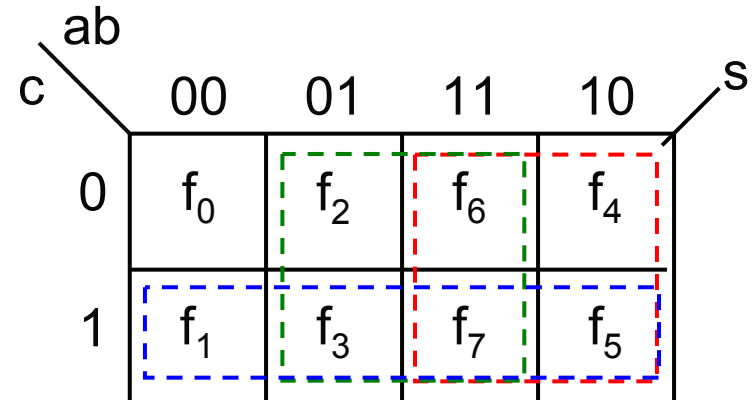
- Hieronder is een waarheidstabel en een Karnaughdiagram gegeven voor drie variabelen.

a	b	c	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7



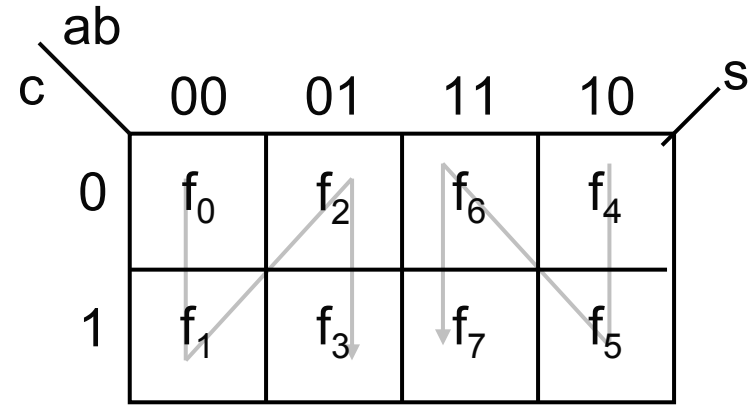
Karnaughdiagrammen

- Het gebieden van a en b wordt nu uitgebreid en komt een nieuwe variabele c bij.
- Let ook op de verdeling van de functiewaarden.
- Het rode gebied is waar a logisch 1 is.
- Het groene gebied is waar b logisch 1 is.
- Het blauwe gebied is waar c logisch 1 is.



Karnaughdiagrammen

- Het invullen gaat eenvoudig. Voor functiewaarden f_0 t/m f_3 is dat hetzelfde als bij twee variabelen.
- Functiewaarden f_4 t/m f_7 moeten gespiegeld worden ingevuld.
- Merk op dat de linkerrand (f_0, f_1) vastzit aan de rechterrand (f_4, f_5).
- Dit is een van de eigenaardigheden van Karnaughdiagrammen.



$$(f_0, f_4) = \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$(f_1, f_5) = \bar{b} \cdot c$$

Karnaughdiagrammen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram gegeven voor een functie.
- De 1 bij f_3 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7 .
- De 1 bij f_5 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7 .
- De 1 bij f_6 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7 .

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Karnaughdiagrammen

- De omranding is als volgt:
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De rode omranding levert $b \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

		ab				s
		00	01	11	10	
c	0	0	0	1	0	
	1	0	1	1	1	

Karnaughdiagrammen

- Gegeven het Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\bar{a} \cdot \bar{b}$
- De groene omranding levert $b \cdot \bar{c}$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De totale functie is $s = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$

		ab				s
		00	01	11	10	
c	0	1	1	1	0	
	1	1	0	1	1	

Karnaughdiagrammen

- Gegeven hetzelfde Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\bar{a} \cdot \bar{c}$
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $\bar{b} \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c$

A Karnaugh map for a function s of three variables a , b , and c . The map is a 2x4 grid. The columns are labeled ab with values 00, 01, 11, and 10. The rows are labeled c with values 0 and 1. The output s is indicated at the top right. The cells contain the following values:

	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

Three prime implicants are highlighted with colored boxes:

- A red box highlights the cells (0,00), (0,01), (1,00), and (1,01), representing the term $\bar{a} \cdot \bar{c}$.
- A green box highlights the cells (0,11) and (1,11), representing the term $a \cdot b$.
- A blue box highlights the cells (1,00) and (1,01), representing the term $\bar{b} \cdot c$.

Karnaughdiagrammen

- Dus deze twee oplossingen geven beide de eenvoudigste functie.
- Het geheel kan als volgt genoteerd worden:

$$s = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot c + \bar{c} \cdot b}{a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{c} + c \cdot \bar{b}}$$

- In de praktijk wordt één van de twee functies gekozen.

	ab				
c	00	01	11	10	s
0	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	

	ab				
c	00	01	11	10	s
0	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	

Opgaven

- Probeer zelf op te lossen:

	ab				
c	00	01	11	10	s
0	1	0	1	1	
1	1	0	1	0	

	ab				
c	00	01	11	10	s
0	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	

	ab				
c	00	01	11	10	s
0	0	1	0	1	
1	0	1	1	1	

Opgaven

- Gegeven de functies

$$f_{x,y,z} = \sum m(0,1,2,6)$$

$$f_{a,b,c} = \sum m(1,3,5,6,7)$$

$$f_{s_2,s_1,s_0} = \sum m(0,3,7) + d(1,2)$$

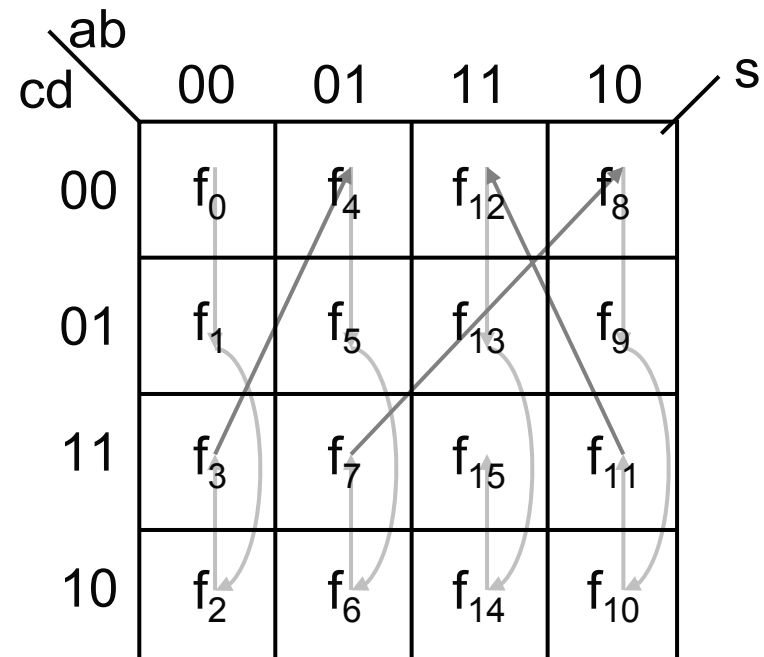
Stel de Karnaughdiagrammen op en geef de functies. Teken de bijbehorende schakelingen met NOT, AND en OR.

- Ontwerp een *majority gate*. Dit is een schakeling met drie ingangen en één uitgang. De uitgang is 1 als de meerderheid van de ingangen 1 is, anders is de uitgang 0.

Karnaughdiagrammen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram voor vier variabelen gegeven.

a	b	c	d	s
0	0	0	0	f_0
0	0	0	1	f_1
0	0	1	0	f_2
0	0	1	1	f_3
<hr/>				
0	1	0	0	f_4
0	1	0	1	f_5
0	1	1	0	f_6
0	1	1	1	f_7
<hr/>				
1	0	0	0	f_8
1	0	0	1	f_9
1	0	1	0	f_{10}
1	0	1	1	f_{11}
<hr/>				
1	1	0	0	f_{12}
1	1	0	1	f_{13}
1	1	1	0	f_{14}
1	1	1	1	f_{15}



Karnaughdiagrammen

- Let op dat de bovenrand 'vast' zit aan de onderrand en dat de linkerrand vast zit aan de rechterrind (het is eigenlijk een *torus*).
- Hieruit volgt dat de hoekpunten aan elkaar vastzitten.

	ab				
cd	00	01	11	10	s
00	f ₀	f ₄	f ₁₂	f ₈	
01	f ₁	f ₅	f ₁₃	f ₉	
11	f ₃	f ₇	f ₁₅	f ₁₁	
10	f ₂	f ₆	f ₁₄	f ₁₀	

- Dus: $(f_0, f_2, f_8, f_{10}) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d}$
 $= (\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c + a \cdot \bar{c} + a \cdot c) \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}$
 $= \bar{b} \cdot \bar{d}$

Karnaughdiagrammen

- Gegeven het Karnaughdiagram aan de rechterkant.
- Voor het uitwerken van de functie zijn vier termen nodig.
- De functie is:

$$s = c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

cd \ ab	00	01	11	10	s
00	0	0	1	0	
01	0	0	1	0	
11	1	1	1	1	
10	0	1	0	1	

Voorbeeld

- Een BCD-cijfer wordt weergegeven met vier bits. Tien combinaties worden gebruikt, zes combinaties niet.
- We willen nu een functie bepalen die aangeeft dat het BCD-cijfer de waarde 9 heeft.
- De functie MOET een logische 1 geven als combinatie 1001 (minterm 9) wordt aangeboden.
- Aangezien de combinaties 1010 t/m 1111 niet voorkomen, kunnen deze ingevuld worden als don't care.
- De functie in *canonieke vorm* is: $is_9 = \sum m(9) + d(10,11,12,13,14,15)$

Voorbeeld

- Gegeven het Karnaughdiagram voor de is-9-detector aan de rechterkant.
- Er is slechts één 1, omringd door don't cares.
- De functie is logisch 1 waar s_3 is logisch 1 en s_0 is logisch 1 dus:

$$is9 = s_3 \cdot s_0$$

s_3s_2 s_1s_0	00	01	11	10	
00	0	0	-	0	is9
01	0	0	-	1	
11	0	0	-	-	
10	0	0	-	-	

Regels Karnaughdiagrammen

- Regels voor het oplossen van Karnaughdiagrammen:
- Zo weinig mogelijke groepen 1-en maken.
- Zo groot mogelijke groepen 1-en maken.
- Altijd groepen 1-en bij elkaar nemen in machten van 2 (1, 2, 4, 8, etc).
- Groepen moeten alleen rechthoeken en vierkanten vormen.
- Groepen mogen elkaar overlappen.

Regels Karnaughdiagrammen

- Echter:
- Begin met 'zielige ééntjes' (1-en die omringd worden door 0-en).
- En:
- Diagonaal geplaatste 1-en kunnen niet samengenomen worden (EXOR !).
- Don't cares kunnen meegenomen worden in de omrandingen als de schakelfunctie hierdoor eenvoudiger wordt.
- Geen groepen met alleen don't cares!

Opgaven

- Probeer zelf:

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	1
10	0	1	0	0

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	1
11	-	-	-	-
10	1	1	-	-

Opgaven

- Probeer zelf:

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	-	1
11	-	-	1	1
10	0	1	0	-

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	1	1
10	1	1	1	1

Multiplexer

- Een multiplexer is een digitale component die data op één van de data-ingangen doorgeeft aan de data-uitgang onder besturing van één of meerdere besturingsingangen.
- Deze component wordt gebruikt wanneer verschillende bronnen data kunnen leveren aan één doel.
- De multiplexer komt voor in onder andere microprocessors en routers.
- Aan bod komen een 2x1-, een 4x1- en een 8x1 multiplexer.
- Multiplexers spelen een belangrijke rol bij *Shannon-decompositie*.

Multiplexer

- Eerst de 2x1-multiplexer. Hiernaast is de waarheidstabel gegeven.
- De uitgang volgt i_0 als $s=0$ en volgt i_1 als $s=1$.
- Invullen in een Karnaughdiagram en functie uitwerken:

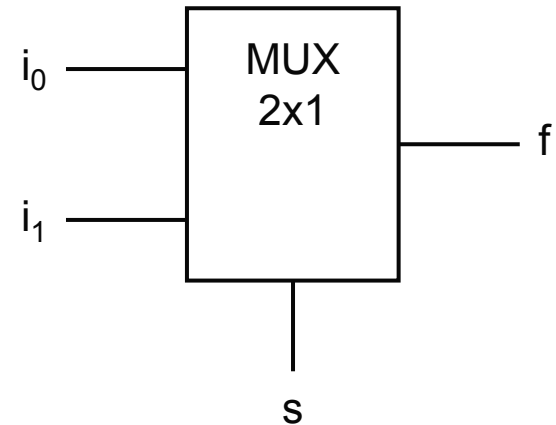
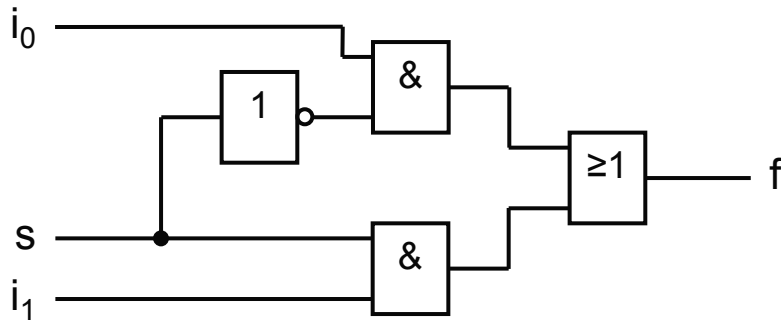
	$s i_1$				
i_0	00	01	11	10	f
0	0	0	1	0	
1	1	1	1	0	

$$f = \bar{s} \cdot i_0 + s \cdot i_1$$

s	i_1	i_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Multiplexer

- Het schema van de 2x1-multiplexer



Multiplexer

- Een 2x1-multiplexer heeft drie ingangen: één besturingsingang en twee data-ingangen.
- Een 4x1- multiplexer heeft twee besturingsingangen en vier data-ingangen.
- Een 8x1- multiplexer heeft drie besturingsingangen en acht data-ingangen.
- Het opstellen van een waarheidstabel voor een 4x1- en een 8x1-multiplexer levert veel problemen op.

Multiplexer

- De structuur van een multiplexer is echter erg eenvoudig.
- Handiger is om een functietabel op te stellen. Hierin worden niet de uitgangen in 0-en en 1-en beschreven, maar komt de functie te staan:

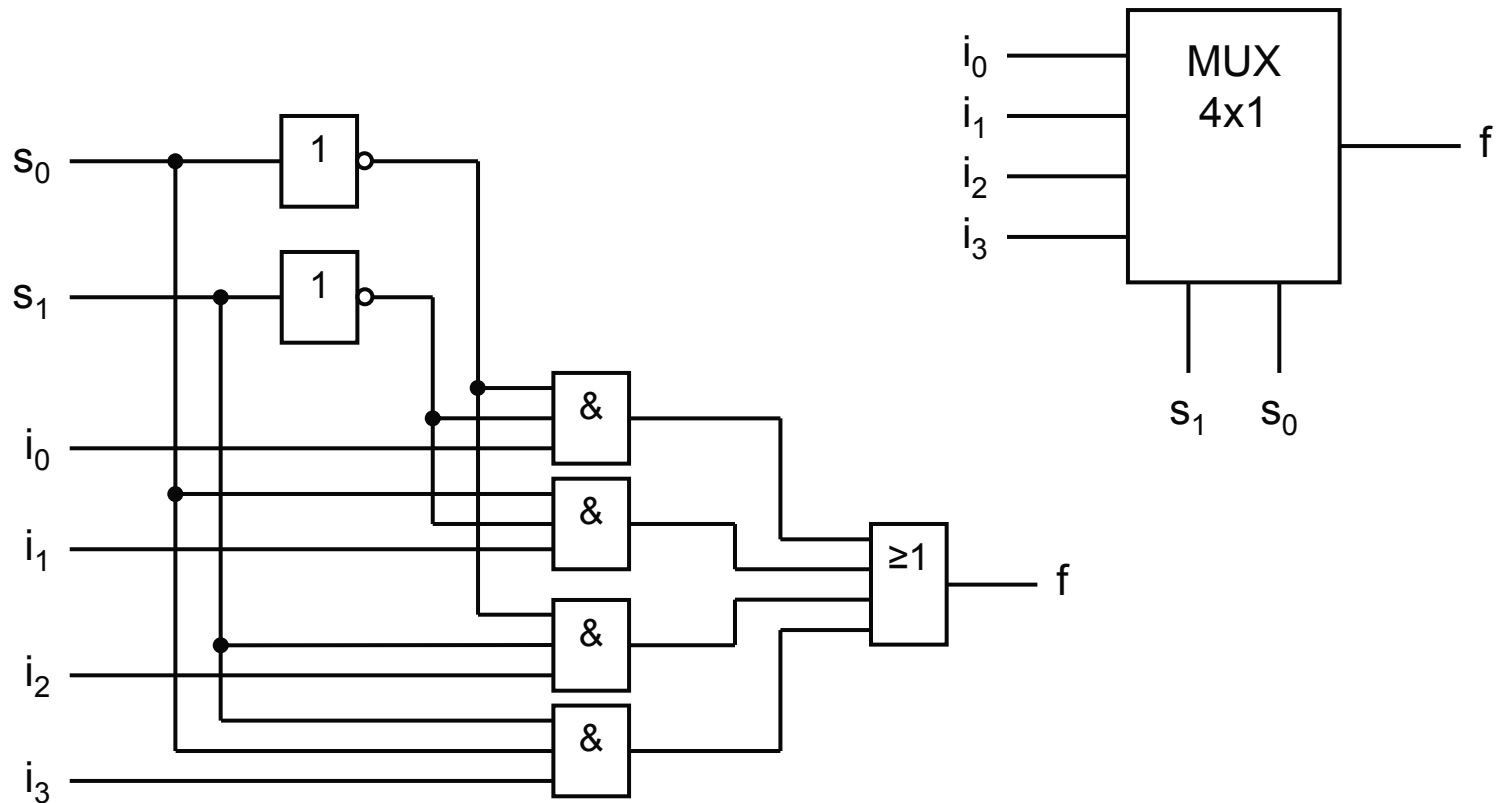
s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

De functie wordt:

$$f = \overline{s_1} \cdot \overline{s_0} \cdot i_0 + \overline{s_1} \cdot s_0 \cdot i_1 + s_1 \cdot \overline{s_0} \cdot i_2 + s_1 \cdot s_0 \cdot i_3$$

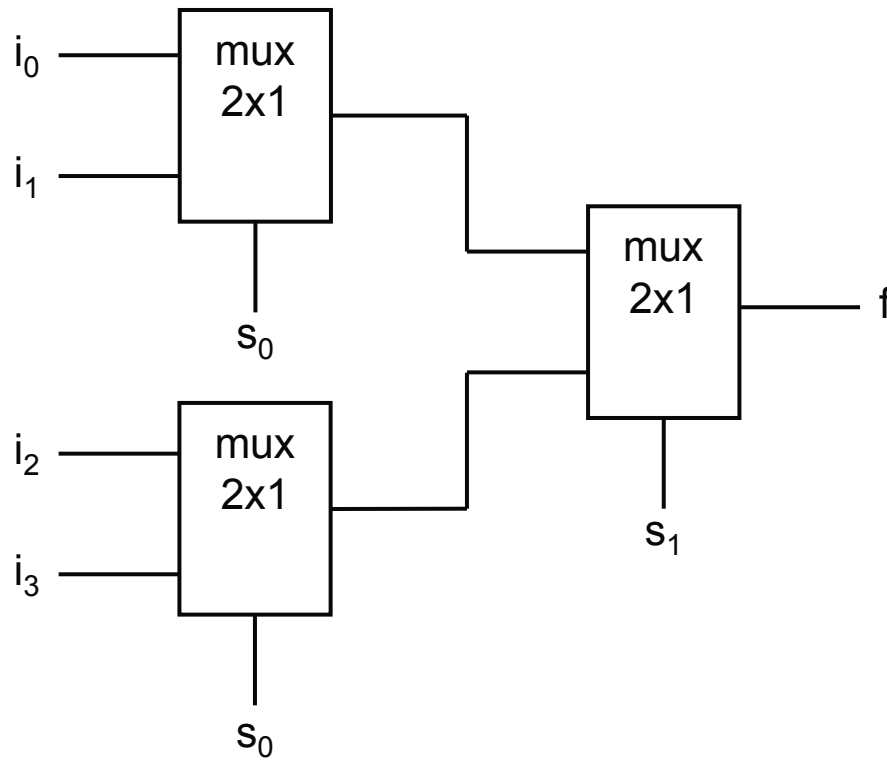
Multiplexer

- Het schema van een 4x1 multiplexer



Multiplexer

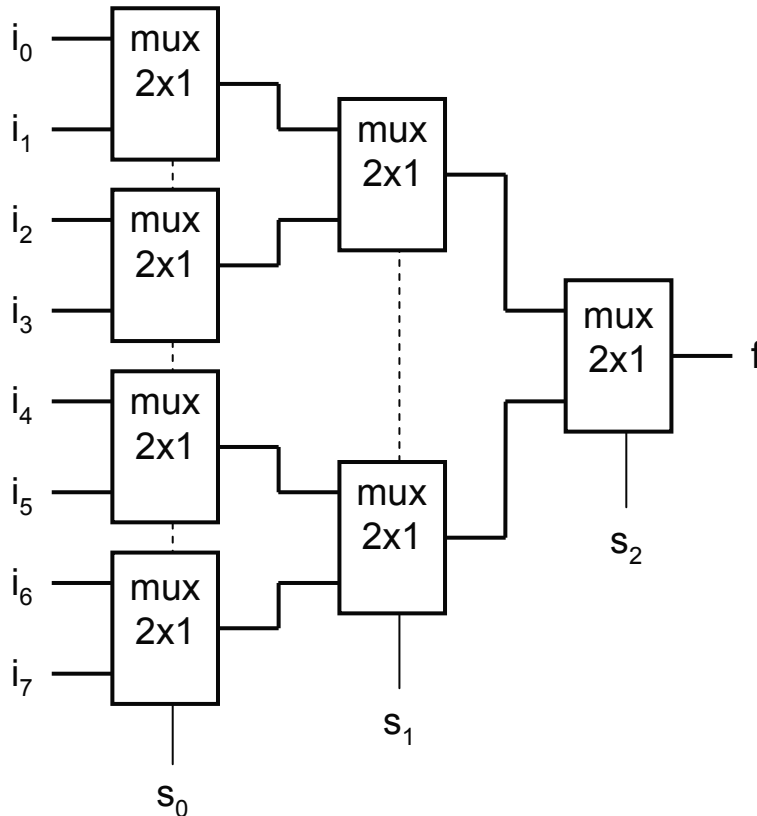
- Slimmer is de regelmatige structuur van de 4x1-multiplexer te gebruiken:



s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

Multiplexer

- Rechts is de functietabel van een 8x1-multiplexer, hieronder het schema met 2x1-multiplexers.

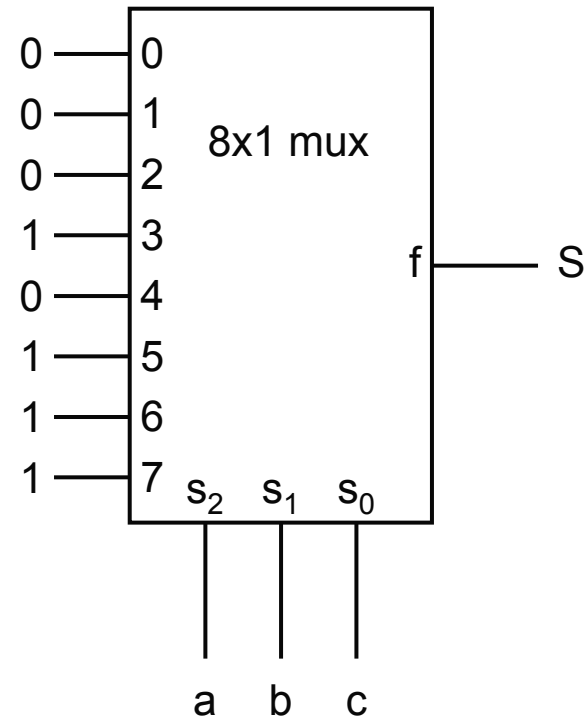


s_2	s_1	s_0	f
0	0	0	i_0
0	0	1	i_1
0	1	0	i_2
0	1	1	i_3
1	0	0	i_4
1	0	1	i_5
1	1	0	i_6
1	1	1	i_7

Multiplexer

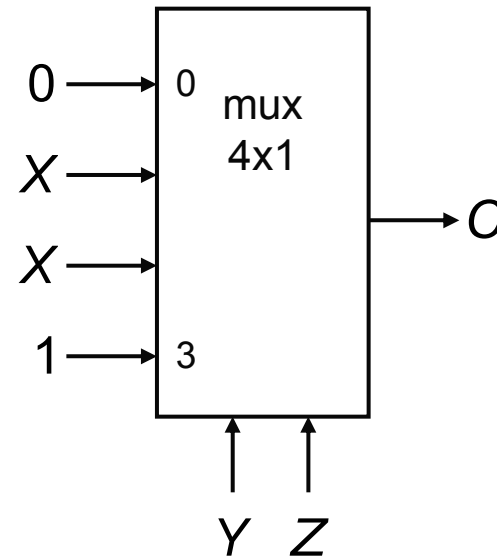
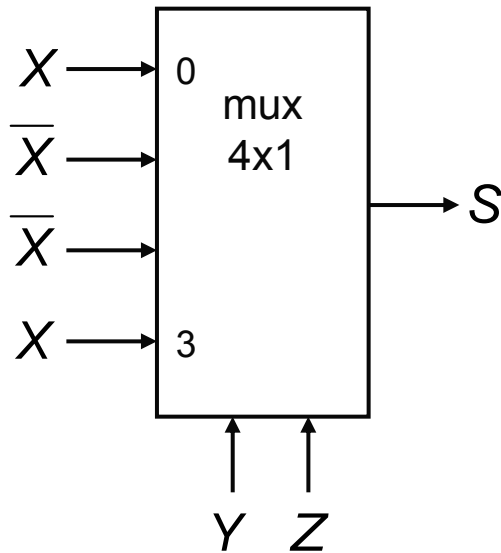
- Een multiplexer kan gebruikt worden om een logische schakeling te maken (denk aan de *som van mintermen*).

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



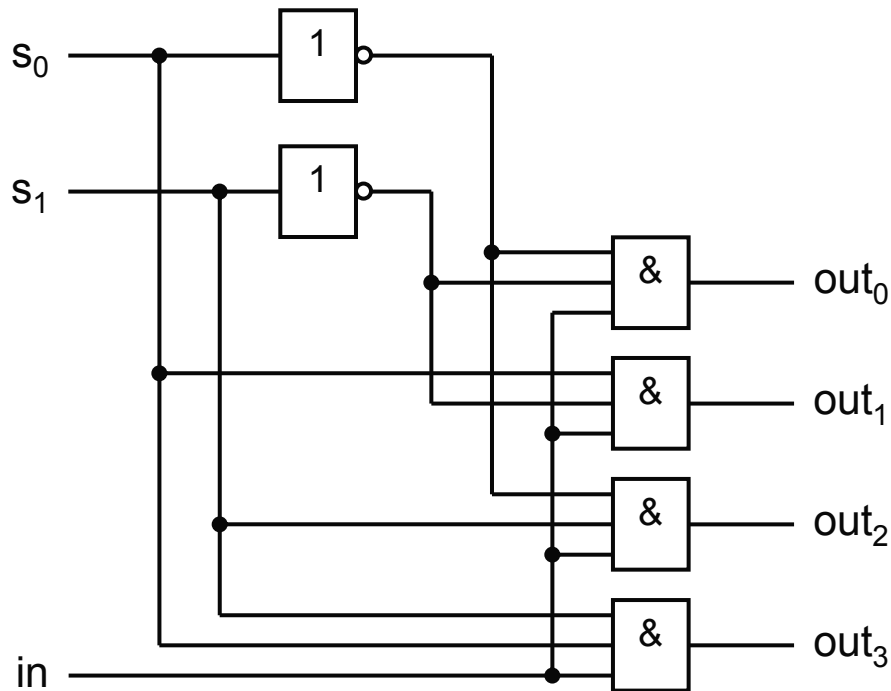
Opgaven

- Gegeven twee 4x1 multiplexers. Deze worden aangesloten volgens onderstaand schema. Bepaal de waarheidstabellen.



Demultiplexer

- Een demultiplexer is het “omgekeerde” van een multiplexer. Bij het aanbieden van een binaire codecombinatie wordt exact één uitgang actief. Het decodeert mintermen.



$$out_0 = \overline{S_1} \cdot \overline{S_0} \cdot in$$

$$out_1 = \overline{S_1} \cdot S_0 \cdot in$$

$$out_2 = S_1 \cdot \overline{S_0} \cdot in$$

$$out_3 = S_1 \cdot S_0 \cdot in$$

Literatuur

- Fundamentals of Digital Logic with VHDL Design 3rd Ed, S. Brown e.a.
- Contemporary Logic Design 2nd Ed, R.H. Katz e.a.
- Digitale Techniek Deel I, 5^e druk, A.P. Thijssen e.a.
- Shannon's originele thesis (met Shannon-decompositie):
http://www.cs.virginia.edu/~robins/Shannon_MS_Thesis.pdf
- Regels voor uitwerken Karnaughdiagrammen:
<http://www.ee.surrey.ac.uk/Projects/Labview/minimisation/karrules.html>

Alternatieve vorm

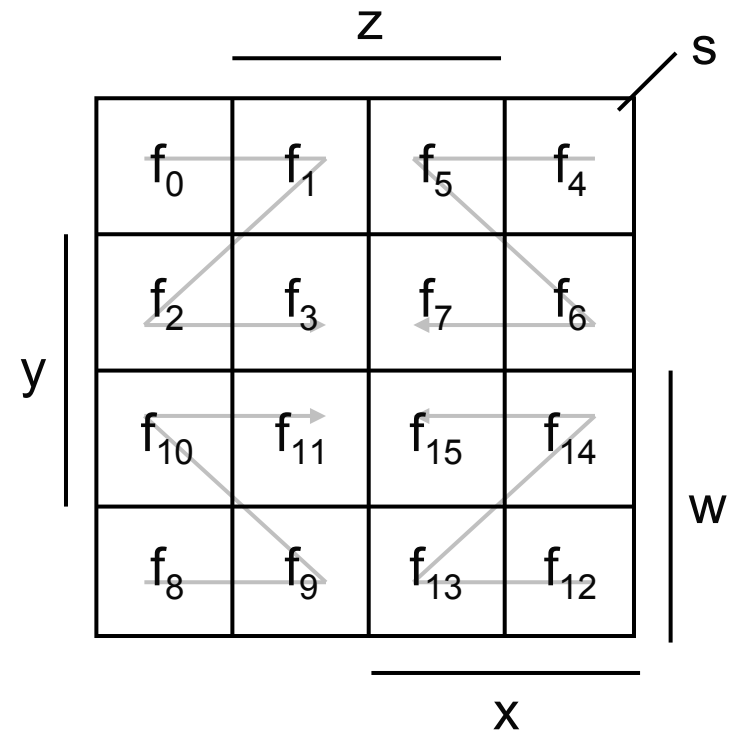
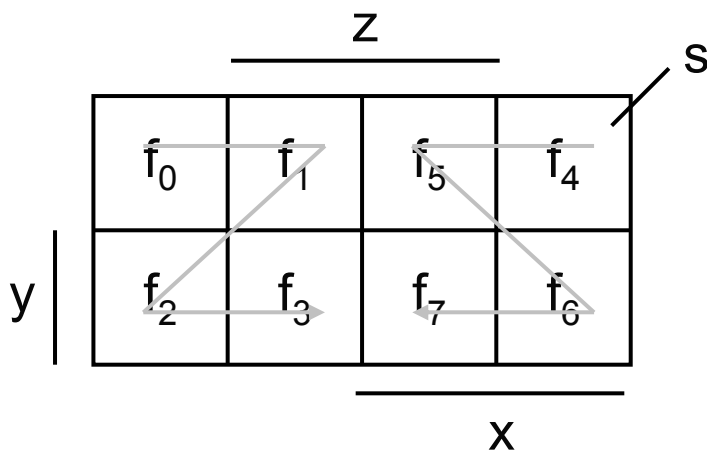
- Er is een alternatieve vorm mogelijk.
- De coderingen aan de randen worden dan vervangen door strepen met de bijbehorende variabele.
- Waar een streep staat is de bijbehorende variabele 1 in de minterm.
- Het ontbreken van een streep geeft aan waar de bijbehorende variabele 0 is in de minterm.
- Deze vorm komt voor in veel nederlandstalige boeken.

y	z	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

	\overline{z}	
y	f_0	f_1
	f_2	f_3

Alternatieve vorm

- Hieronder zijn de Karnaughdiagrammen gegeven voor drie en vier variabelen.



Opgaven

- Probeer zelf op te lossen:

	z			
	1	0	1	1
y	1	0	0	1
	x			

	z			
	0	1	0	1
y	1	0	1	0
	x			

	z			
	0	1	0	1
y	0	1	1	1
	x			



Academie voor Technology, Innovation &
Society Delft
Academie voor ICT & Media

De Haagse Hogeschool, Delft
+31-15-2606311
J.E.J.opdenBrouw@hhs.nl
www.dehaagsehogeschool.nl

DE HAAGSE
HOGESCHOOL