Inleiding Digitale Techniek

Week 3 – Schakelalgebra, waarheidstabellen, Karnaugh, (de)mux

Jesse op den Brouw

INLDIG/2020-2021

HAAGSE HOGESCHOOL

Schakelalgebra

- Schakelalgebra is de wiskunde waarmee digitale schakelingen ontworpen kunnen worden.
- Het is gebaseerd op de Boole-algebra (Boole, 1854) en is dus zo’n 170 jaar oud.
- Boole onderzocht de wiskunde van verzamelingen.
- In 1937 toonde Shannon* aan dat de *tweewaardige* Boole-algebra gebruikt kon worden bij het analyseren en ontwerpen van contactschakelingen (relais).

- * “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”

Schakelalgebra

- De schakelalgebra bestaat uit:
- Variabelen: a, Z, X, open1, ...
- Constanten: 0, 1
- Operatoren
  - = (is gelijk aan)
  - . (AND)
  - + (OR),
  - $\overline{}$ (NOT, *overbar*)
- Haakjes: ( ) of { } of [ ]

Schakelalgebra

- De schakelalgebra is gebaseerd op de volgende rekenregels voor constanten:

$0 \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$
$0 \cdot 1 = 0$	$1 + 0 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$

- Daarnaast geldt:

$x = 0$ als $x \neq 1$ $\qquad$ $x = 1$ als $x \neq 0$

nb: dit zijn de *axioma's* (niet te bewijzen grondstelling) van de schakelalgebra.

Schakelalgebra

- Hoe wordt de volgende functie uitgewerkt?

$$s = a \cdot (b + \overline{c})$$

- Prioriteitsvolgorde:

  Haakjes
  NOT
  AND
  OR

Schakelalgebra

- Dus:

$$s = a \cdot (b + \overline{c})$$

- Eerst $\overline{c}$ uitwerken
- dan b met de uitkomst van boven uitwerken $(b + \overline{c})$
- daarna a met de uitkomst van boven uitwerken $(a \cdot (b + \overline{c}))$

- Gegeven dat a=1, b=0 en c=0 dan is de uitkomst

$$\overline{c} = 1$$

$$b + \overline{c} = 0 + 1 = 1$$

$$a \cdot (b + \overline{c}) = 1 \cdot (1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Opgaven

- Gegeven dat a=1, b=0 en c=0. Werk de volgende functies uit. De waarde van d is niet gegeven.

$$s = (a + b) \cdot (\overline{b} + c)$$

$$s = \overline{(\overline{a + b}) \cdot (\overline{c + d})}$$

$$s = \overline{b} \cdot (c + d \cdot (c + a))$$

Schakelalgebra

- Om de schakelalgebra enige meerwaarde te geven zijn er nogal wat *theorema's**):

Commutatieve wetten

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Associatieve wetten

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Distributieve wetten

$$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$$

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$

*) stelling of uitspraak die af te leiden is met behulp van een verzameling axioma`s en reeds eerder afgeleide stellingen

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Schakelalgebra

Gelijkheidswetten

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

Negatiewetten

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Moduluswetten

$$x + 0 = x \qquad x + 1 = 1$$

$$x \cdot 1 = x \qquad x \cdot 0 = 0$$

Schakelalgebra

Absorptiewetten

$$x + x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

$$x \cdot y + \overline{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$$

$$(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$$

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Schakelalgebra

De Morgan

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Substitutie

$$a \cdot b + c \cdot d \rightarrow x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \rightarrow \overline{\overline{a \cdot b} \cdot \overline{c \cdot d}}$$

Noot over NOT

- In boeken en computertalen worden verschillende varianten van NOT gebruikt.

Overbar	$\overline{}$
Prime	$'$
Negation	$\neg$
Bang	!

- Voorbeelden

$$x' \cdot y' + x \cdot y = (x' \cdot y + x \cdot y')'$$

$$\neg x \wedge \neg y \equiv \neg(x \vee y)$$

Waarheidstabel

- De meest basale weergave van een logische functie is de waarheidstabel.
- Gegeven is de algemene opbouw van een waarheidstabel, in dit geval voor drie variabelen.
- De rijen zijn volgens de normale binaire telcode oplopend genummerd.
- De variabelen f_0 t/m f_7 zijn de bijbehorende functiewaarden.

x	y	z	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Waarheidstabel

- Elke regel levert een bijdrage aan de functie.
- De eerste regel leest als volgt:

$$s = f_0 \text{ als } x = 0, y = 0, z = 0$$

- De bijdrage van deze regel aan de functie is:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot f_0$$

- De overige regels op vergelijkbare wijze.

x	y	z	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Minterm

- De functie kan geschreven worden als:

$$s = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot f_0 + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot f_1 + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \cdot f_2 + \overline{x} \cdot y \cdot z \cdot f_3 +$$
$$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot f_4 + x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot f_5 + x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot f_6 + x \cdot y \cdot z \cdot f_7$$

- De termen $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ t/m $x \cdot y \cdot z$ worden *mintermen* genoemd.

- Mintermen zijn producttermen waarin alle variabelen of een inverse (maar niet beide tegelijkertijd) voorkomen.

Som van mintermen

- Mintermen worden doorgaans afgekort door een *m* met een index.

- Zo is de minterm die hoort bij $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ gelijk aan m_0 en $x \cdot y \cdot z$ gelijk aan m_7.

- De functie kan dus ook geschreven worden als:

$$s = m_0 \cdot f_0 + m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + m_3 \cdot f_3 + m_4 \cdot f_4 + m_5 \cdot f_5 + m_6 \cdot f_6 + m_7 \cdot f_7$$

- De vorm van deze functie wordt de *som van mintermen* genoemd. Dit is één van de twee *standaardvormen.*

Standaardvorm

- Gegeven is de waarheidstabel rechts.
- De functie kan geschreven worden als:

$$s = m_0 \cdot 0 + m_1 \cdot 1 + \ldots + m_6 \cdot 1 + m_7 \cdot 1$$

- Of gewoon:

$$s = m_1 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

- Of nog sneller:

$$s = \sum m(1{,}3{,}5{,}6{,}7)$$

x	y	z	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Maxterm

- De functie kan geschreven worden als:

$$s = \left(x+y+z+f_0\right)\cdot\left(x+y+\overline{z}+f_1\right)\cdot\left(x+\overline{y}+z+f_2\right)\cdot\left(x+\overline{y}+\overline{z}+f_3\right)+$$
$$\left(\overline{x}+y+z+f_4\right)\cdot\left(\overline{x}+y+\overline{z}+f_5\right)\cdot\left(\overline{x}+\overline{y}+z+f_6\right)\cdot\left(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+f_7\right)$$

- De termen $x+y+z$ t/m $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$ worden *maxtermen* genoemd.
- Maxtermen zijn somtermen waarin alle variabelen of een inverse (maar niet beide tegelijkertijd) voorkomen.

Product van maxtermen

- Maxtermen worden doorgaans afgekort door een *M* met een index.
- Zo is de maxterm die hoort bij $x+y+z$ gelijk aan M_0 en $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$ gelijk aan M_7.
- De functie kan dus ook geschreven worden als:

$$s = (M_0+f_0)\cdot(M_1+f_1)\cdot(M_2+f_2)\cdot(M_3+f_3)\cdot$$
$$(M_4+f_4)\cdot(M_5+f_5)\cdot(M_6+f_6)\cdot(M_7+f_7)$$

- De vorm van deze functie wordt de *product van maxtermen* genoemd. Dit is één van de twee *standaardvormen.*

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Standaardvorm

- Gegeven is de waarheidstabel rechts.
- De functie kan geschreven worden als:

$$s = (M_0 + 0) \cdot (M_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (M_6 + 1) \cdot (M_7 + 1)$$

- Of gewoon:

$$s = M_0 \cdot M_2 \cdot M_4$$

- Of nog sneller:

$$s = \Pi\ M(0,2,4)$$

x	y	z	s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Verband minterm en maxterm

- Met behulp van de stellingen van De Morgan is aan te tonen dat mintermen en maxtermen aan elkaar verwant zijn. Als voorbeeld een functie met twee variabelen:

$$s = m_0 \cdot f_0 + m_1 \cdot f_1 + m_2 \cdot f_2 + m_3 \cdot f_3$$

- De inversie functie kan eenvoudig gemaakt worden door alle functiewaarden te inverteren:

$$\overline{s} = m_0 \cdot \overline{f_0} + m_1 \cdot \overline{f_1} + m_2 \cdot \overline{f_2} + m_3 \cdot \overline{f_3}$$

- Natuurlijk geldt: $s = \overline{\overline{s}}$

Verband minterm en maxterm

- Door De Morgan twee keer toe te passen krijgen we:

$$
\begin{aligned}
s &= \overline{m_0 \cdot \overline{f_0} + m_1 \cdot \overline{f_1} + m_2 \cdot \overline{f_2} + m_3 \cdot \overline{f_3}} = \\
&\overline{m_0 \cdot \overline{f_0}} \cdot \overline{m_1 \cdot \overline{f_1}} \cdot \overline{m_2 \cdot \overline{f_2}} \cdot \overline{m_3 \cdot \overline{f_3}} = \\
&\left(\overline{m_0} + f_0\right) \cdot \left(\overline{m_1} + f_1\right) \cdot \left(\overline{m_2} + f_2\right) \cdot \left(\overline{m_3} + f_3\right) = \\
&\left(M_0 + f_0\right) \cdot \left(M_1 + f_1\right) \cdot \left(M_2 + f_2\right) \cdot \left(M_3 + f_3\right)
\end{aligned}
$$

- Hieruit volgt dat:

$$m_0 = \overline{M_0} \quad \ldots \quad m_3 = \overline{M_3}$$

Don’t care

- Het kan zijn dat bepaalde functiewaarden niet gespecificeerd zijn. Zo’n functiewaarde heet *don’t care*.

- Don’t cares komen voort uit het feit dat bepaalde uitgangswaarden niet interessant zijn.

- Don’t cares komen voort uit het feit dat bepaalde ingangscombinaties nooit voorkomen (can’t happen).

- Don’t cares worden weergegeven door een – (minus). Andere representaties: x, d

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Don’t care

- Gegeven onderstaande waarheidstabel.

- De functie wordt als volgt genoteerd:

$$s = \sum m(2,3) + d(1)$$

- Don’t cares bestaan alleen bij de specificatie van een functie, niet bij de realisatie van een functie.

- Bij realisatie worden ze omgezet in een 0 of 1.

x	y	s
0	0	0
0	1	-
1	0	1
1	1	1

Vereenvoudigen

- Het is mogelijk om met behulp van de schakelalgebra functies te bewerken.
- Meestal wordt gezocht naar de eenvoudigste vorm, de vorm die het minste aantal operaties en variabelen bevat.
- Maar het kan ook zijn de vorm wordt gezocht die het eenvoudigst *afbeeldbaar* is op poorten of transistoren op IC’s.
- Voor alsnog wordt de eerste definitie gehanteerd.

Karnaughdiagrammen

- Het vereenvoudigen van schakelfuncties is een lastige bezigheid.
- Het vereist kennis van alle wetten en regels.
- Er moet veel ervaring worden opgedaan (lees: oefenen).
- Een slimmere methode is het gebruik van Karnaughdiagrammen.
- In deze slides wordt gebruik gemaakt van de amerikaanse variant (er is ook een variant die in nederlandse boeken wordt gebruikt).

Karnaughdiagrammen

- Oorspronkelijk bedacht door Veitch (1952), later verbeterd door Karnaugh (1953).

- Het is een visueel hulpmiddel om functies te vereenvoudigen.

- Het is een grafische voorstelling van een waarheidstabel, verwant aan *Venn-diagrammen*.

- Gebaseerd op de veel gebruikte vereenvoudigingen:

$$(term) \cdot \overline{x} + (term) \cdot x = term$$

$$(term) + (term) = term$$

- Levert een *som van producten* op.

Twee variabelen

- Rechts is gegeven de waarheidstabel en het Karnaughdiagram voor twee variabelen.
- Het Karnaughdiagram bestaat uit hokjes, één voor elke functiewaarde.
- Horizontaal worden de waarden van a bij de hokjes geschreven (rode ovaal).
- Verticaal worden de waarden van b bij de hokjes geschreven (blauwe ovaal).

a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

b \ a	0	1
0	f_0	f_2
1	f_1	f_3

Twee variabelen

- Elk hokje vertegenwoordigt dus een samenstelling van a en b (*minterm*).
- Horizontaal en vertikaal geplaatste hokjes verschillen precies in één variabele.
- De functies van a en b:

$$a = \sum m(2,3) \qquad \bar{a} = \sum m(0,1)$$

$$b = \sum m(1,3) \qquad \bar{b} = \sum m(0,2)$$

a	b	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

b \ a	0	1
0	f_0	f_2
1	f_1	f_3

Voorbeeld met twee variabelen

- Rechts is een waarheidstabel van een functie gegeven.
- (Dit is natuurlijk de functie van een OR).
- Het invullen gaat als volgt. Begin bij f_0 en werk door naar f_3. Het resultaat is een z-patroon.

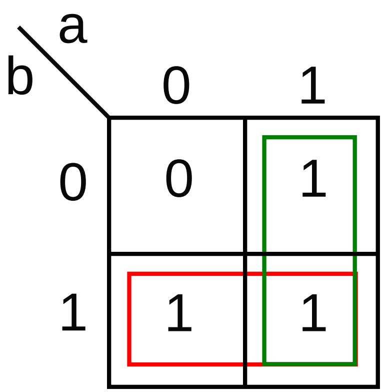
a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	1

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Voorbeeld met twee variabelen

- Nu kunnen a en b gevonden worden.
- Omrand de 1-en die bij a horen.
- Omrand de 1-en die bij b horen.
- De functie is $s = a + b$
- Merk op dat één functiewaarde (minterm) twee keer omrand is.



Karnaughdiagrammen

- Hieronder is een waarheidstabel en een Karnaughdiagram gegeven voor drie variabelen.

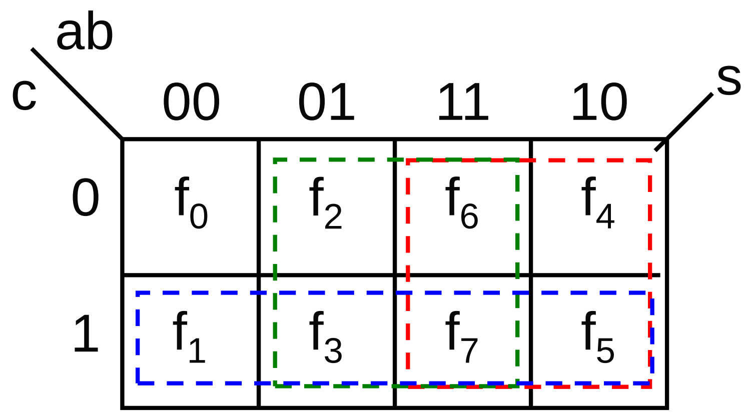
a	b	c	s
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

s

c \ ab	00	01	11	10
0	f_0	f_2	f_6	f_4
1	f_1	f_3	f_7	f_5

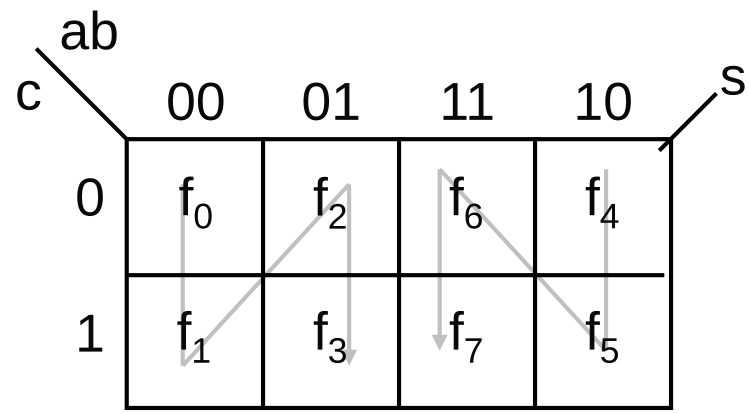
Karnaughdiagrammen

- Het gebieden van a en b wordt nu uitgebreid en komt een nieuwe variabele c bij.
- Let ook op de verdeling van de functiewaarden.
- Het rode gebied is waar a logisch 1 is.
- Het groene gebied is waar b logisch 1 is.
- Het blauwe gebied is waar c logisch 1 is.



Karnaughdiagrammen

- Het invullen gaat eenvoudig. Voor functiewaarden f_0 t/m f_3 is dat hetzelfde als bij twee variabelen.
- Functiewaarden f_4 t/m f_7 moeten gespiegeld worden ingevuld.
- Merk op dat de linkerrand (f_0, f_1) vastzit aan de rechterrand (f_4, f_5).
- Dit is een van de eigenaardigheden van Karnaughdiagrammen.



$$(f_0, f_4) = \overline{b} \cdot \overline{c}$$

$$(f_1, f_5) = \overline{b} \cdot c$$

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Karnaughdiagrammen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram gegeven voor een functie.
- De 1 bij f_3 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.
- De 1 bij f_5 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.
- De 1 bij f_6 wordt omringd met nullen, het kan alleen samen genomen worden met f_7.

s

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Karnaughdiagrammen

- De omranding is als volgt:
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De rode omranding levert $b \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

s

Karnaughdiagrammen

- Gegeven het Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\overline{a} \cdot \overline{b}$
- De groene omranding levert $b \cdot \overline{c}$
- De blauwe omranding levert $a \cdot c$
- De totale functie is $s = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c + b \cdot \overline{c}$

s

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

Karnaughdiagrammen

- Gegeven hetzelfde Karnaughdiagram
- De rode omranding levert $\overline{a} \cdot \overline{c}$
- De groene omranding levert $a \cdot b$
- De blauwe omranding levert $\overline{b} \cdot c$
- De totale functie is $s = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot c$

s

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

Karnaughdiagrammen

- Dus deze twee oplossingen geven beide de eenvoudigste functie.

- Het geheel kan als volgt genoteerd worden:

$$s = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b} + a\cdot c + \overline{c}\cdot b}{a\cdot b + \overline{a}\cdot\overline{c} + c\cdot\overline{b}}$$

- In de praktijk wordt één van de twee functies gekozen.

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

s

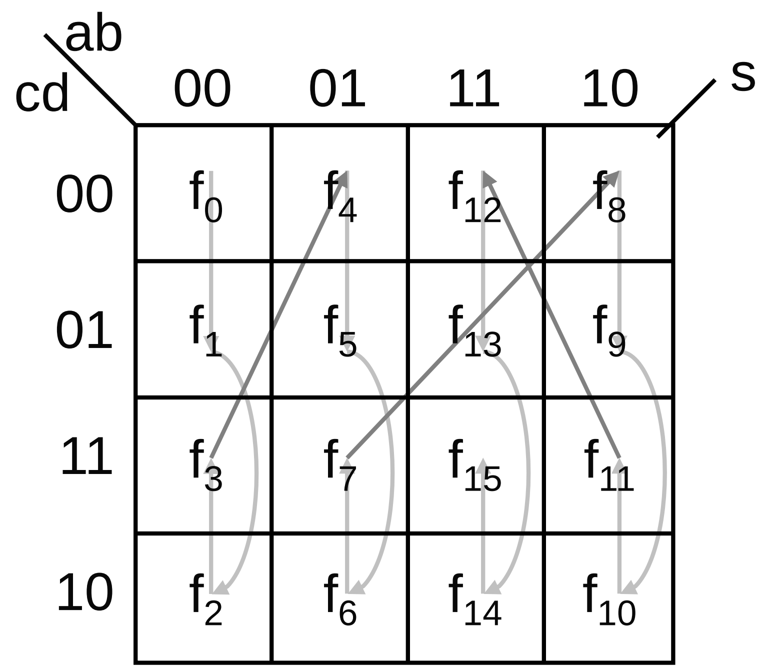
c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

s

Karnaughdiagrammen

- Hiernaast is een Karnaughdiagram voor vier variabelen gegeven.

a	b	c	d	s
0	0	0	0	f_0
0	0	0	1	f_1
0	0	1	0	f_2
0	0	1	1	f_3
0	1	0	0	f_4
0	1	0	1	f_5
0	1	1	0	f_6
0	1	1	1	f_7
1	0	0	0	f_8
1	0	0	1	f_9
1	0	1	0	f_{10}
1	0	1	1	f_{11}
1	1	0	0	f_{12}
1	1	0	1	f_{13}
1	1	1	0	f_{14}
1	1	1	1	f_{15}



Karnaughdiagrammen

- Let op dat de bovenrand ‘vast’ zit aan de onderrand en dat de linkerrand vast zit aan de rechterrand (het is eigenlijk een *torus*).

- Hieruit volgt dat de hoekpunten aan elkaar vastzitten.

cd \ ab	00	01	11	10
00	f_0	f_4	f_{12}	f_8
01	f_1	f_5	f_{13}	f_9
11	f_3	f_7	f_{15}	f_{11}
10	f_2	f_6	f_{14}	f_{10}

s

- Dus: $(f_0,f_2,f_8,f_{10}) = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d} + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$

$$= (\overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot c + a\cdot\overline{c} + a\cdot c)\cdot\overline{b}\cdot\overline{d}$$

$$= \overline{b}\cdot\overline{d}$$

Karnaughdiagrammen

- Gegeven het Karnaughdiagram aan de rechterkant.
- Voor het uitwerken van de functie zijn vier termen nodig.
- De functie is:

$$s = c \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c}$$

s

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	1

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Voorbeeld

- Een BCD-cijfer wordt weergegeven met vier bits. Tien combinaties worden gebruikt, zes combinaties niet.
- We willen nu een functie bepalen die aangeeft dat het BCD-cijfer de waarde 9 heeft.
- De functie MOET een logische 1 geven als combinatie 1001 (minterm 9) wordt aangeboden.
- Aangezien de combinaties 1010 t/m 1111 niet voorkomen, kunnen deze ingevuld worden als don't care.
- De functie in *canonieke vorm* is: $is9 = \sum m(9) + d(10,11,12,13,14,15)$

Voorbeeld

- Gegeven het Karnaughdiagram voor de is-9-detector aan de rechterkant.
- Er is slechts één 1, omringd door don't cares.
- De functie is logisch 1 waar s_3 is logisch 1 en s_0 is logisch 1 dus:

$$is9 = s_3 \cdot s_0$$

is9

s_1s_0 \ s_3s_2	00	01	11	10
00	0	0	-	0
01	0	0	-	1
11	0	0	-	-
10	0	0	-	-

Regels Karnaughdiagrammen

- Regels voor het oplossen van Karnaughdiagrammen:
- Zo weinig mogelijke groepen 1-en maken.
- Zo groot mogelijke groepen 1-en maken.
- Altijd groepen 1-en bij elkaar nemen in machten van 2 (1, 2, 4, 8, etc).
- Groepen moeten alleen rechthoeken en vierkanten vormen.
- Groepen mogen elkaar overlappen.

Regels Karnaughdiagrammen

- Echter:
- Begin met ‘zielige ééntjes’ (1-en die omringd worden door 0-en).
- En:
- Diagonaal geplaatste 1-en kunnen niet samengenomen worden (EXOR !).
- Don’t cares kunnen meegenomen worden in de omrandingen als de schakelfunctie hierdoor eenvoudiger wordt.
- Geen groepen met alleen don’t cares!

Multiplexer

- Een multiplexer is een digitale component die data op één van de data-ingangen doorgeeft aan de data-uitgang onder besturing van één of meerdere besturingsingangen.
- Deze component wordt gebruikt wanneer verschillende bronnen data kunnen leveren aan één doel.
- De multiplexer komt voor in onder andere microprocessors en routers.
- Aan bod komen een 2x1-, een 4x1- en een 8x1 multiplexer.
- Multiplexers spelen een belangrijke rol bij *Shannon-decompositie*.

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Multiplexer

- Eerst de 2x1-multiplexer. Hiernaast is de waarheidstabel gegeven.
- De uitgang volgt i_0 als s=0 en volgt i_1 als s=1.
- Invullen in een Karnaughdiagram en functie uitwerken:

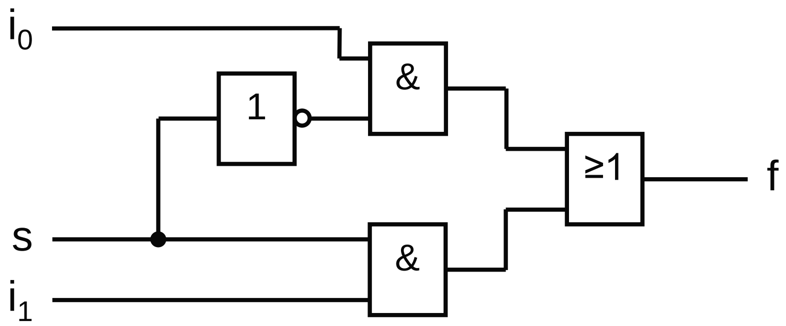
i_0 \ si_1 (f)	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

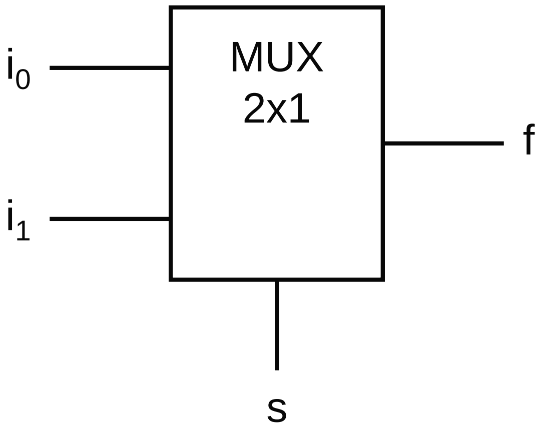
$$f = \overline{s} \cdot i_0 + s \cdot i_1$$

s	i_1	i_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Multiplexer

- Het schema van de 2x1-multiplexer





Multiplexer

- Een 2x1-multiplexer heeft drie ingangen: één besturingsingang en twee data-ingangen.
- Een 4x1- multiplexer heeft twee besturingsingangen en vier data-ingangen.
- Een 8x1- multiplexer heeft drie besturingsingangen en acht data-ingangen.
- Het opstellen van een waarheidstabel voor een 4x1- en een 8x1-multiplexer levert veel problemen op.

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Multiplexer

- De structuur van een multiplexer is echter erg eenvoudig.
- Handiger is om een functietabel op te stellen. Hierin worden niet de uitgangen in 0-en en 1-en beschreven, maar komt de functie te staan:

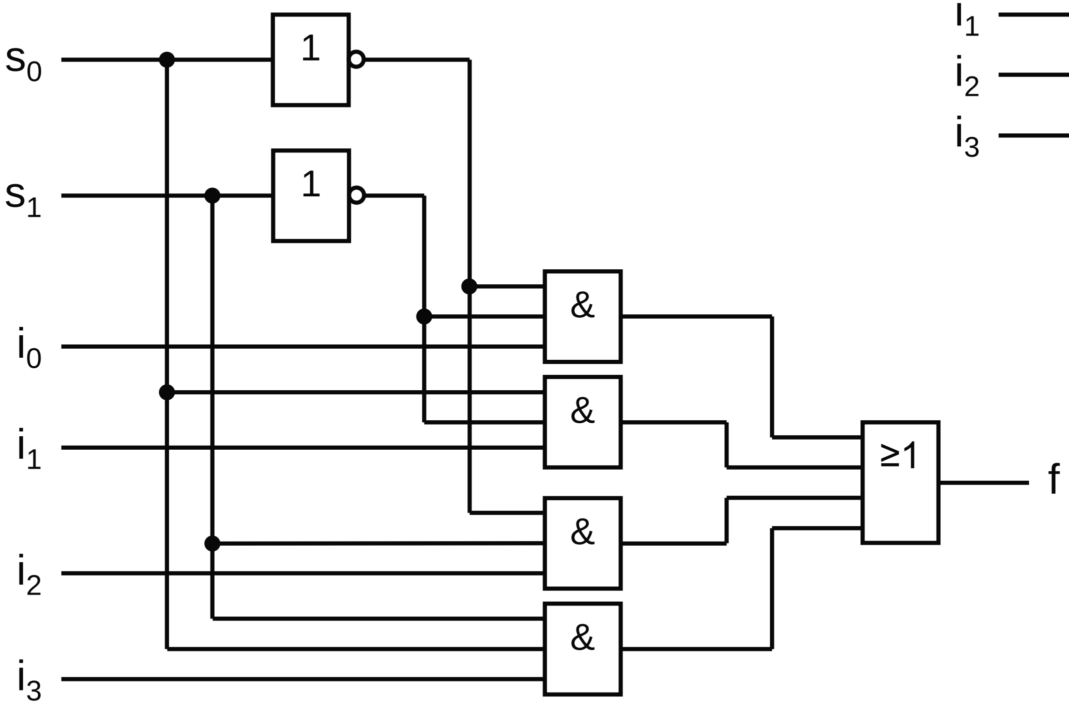
s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

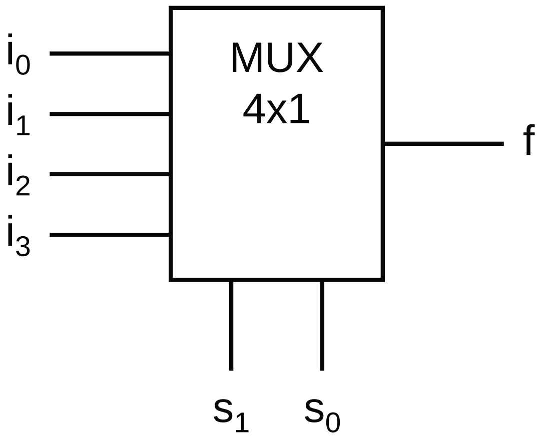
De functie wordt:

$$f = \overline{s_1} \cdot \overline{s_0} \cdot i_0 + \overline{s_1} \cdot s_0 \cdot i_1 + s_1 \cdot \overline{s_0} \cdot i_2 + s_1 \cdot s_0 \cdot i_3$$

Multiplexer

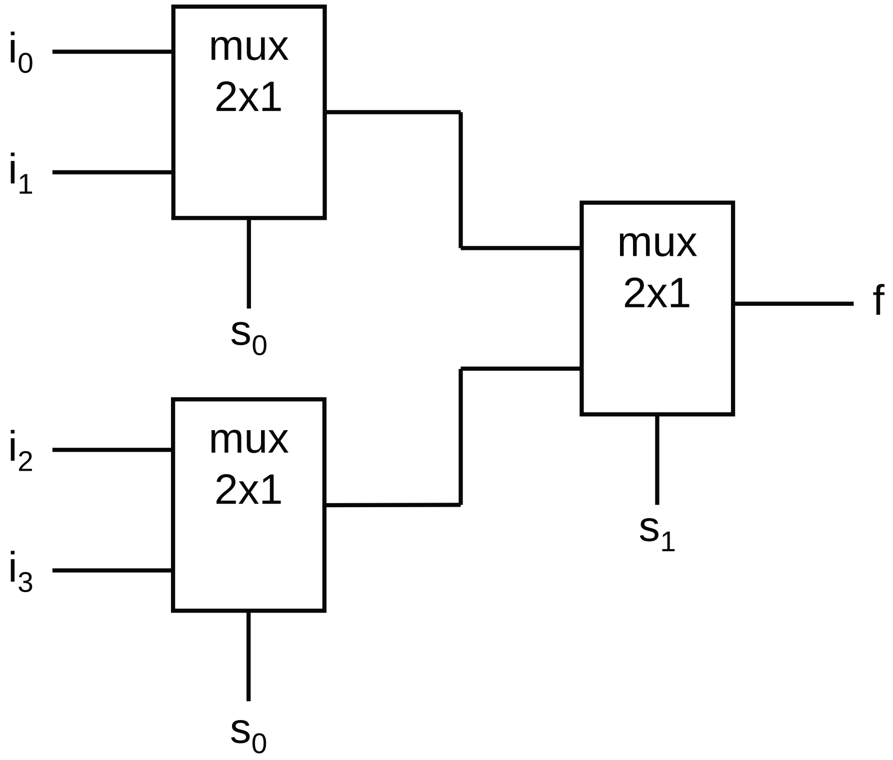
- Het schema van een 4x1 multiplexer





Multiplexer

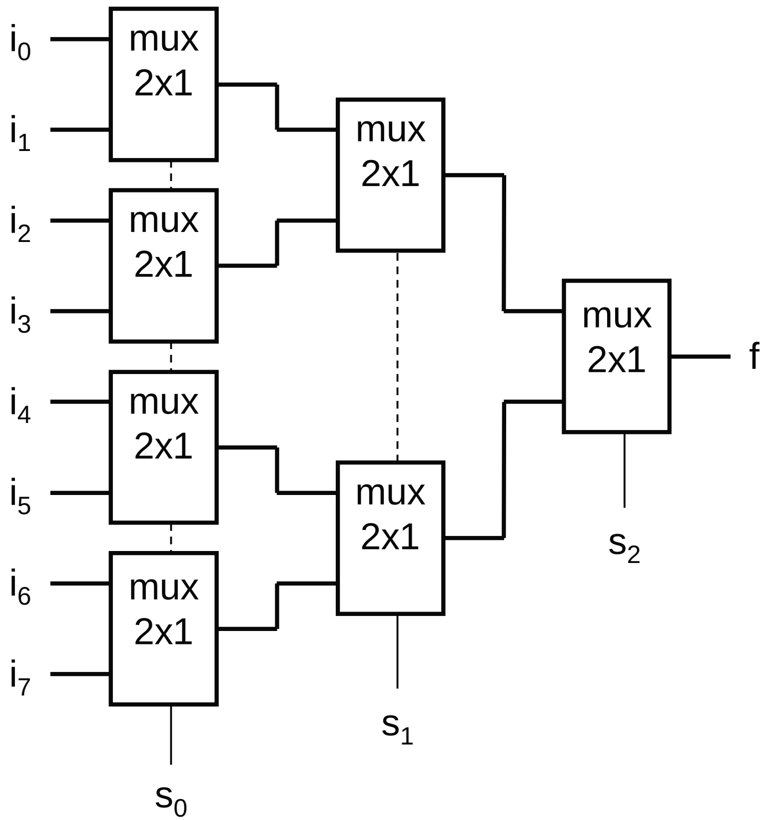
- Slimmer is de regelmatige structuur van de 2x1-multiplexer te gebruiken:



s_1	s_0	f
0	0	i_0
0	1	i_1
1	0	i_2
1	1	i_3

Multiplexer

- Rechts is de functietabel van een 8x1-multiplexer, hieronder het schema met 2x1-multiplexers.

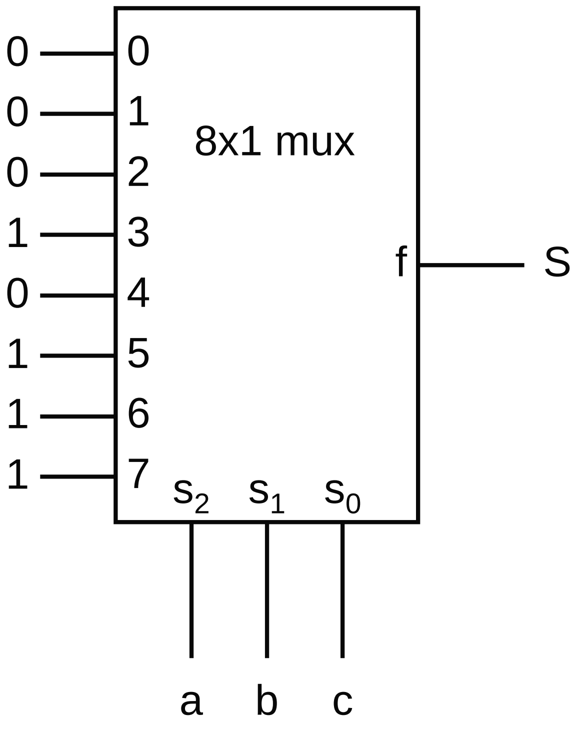


s_2	s_1	s_0	f
0	0	0	i_0
0	0	1	i_1
0	1	0	i_2
0	1	1	i_3
1	0	0	i_4
1	0	1	i_5
1	1	0	i_6
1	1	1	i_7

Multiplexer

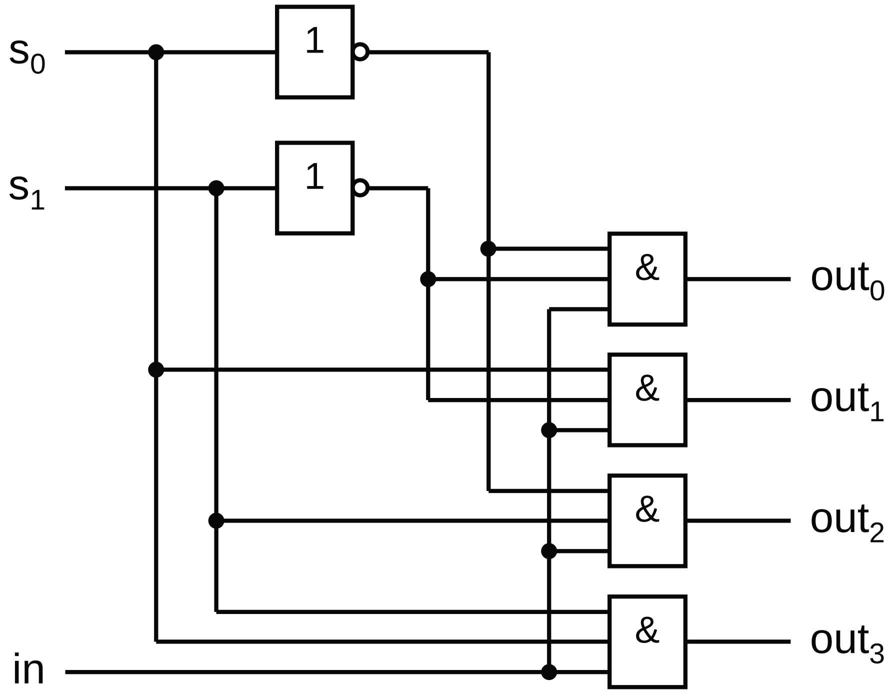
- Een multiplexer kan gebruikt worden om een logische schakeling te maken (denk aan de *som van mintermen*).

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Demultiplexer

- Een demultiplexer is het “omgekeerde” van een multiplexer. Bij het aanbieden van een binaire codecombinatie wordt exact één uitgang actief. Het decodeert mintermen.



$$out_0 = \overline{S_1} \cdot \overline{S_0} \cdot in$$
$$out_1 = \overline{S_1} \cdot S_0 \cdot in$$
$$out_2 = S_1 \cdot \overline{S_0} \cdot in$$
$$out_3 = S_1 \cdot S_0 \cdot in$$

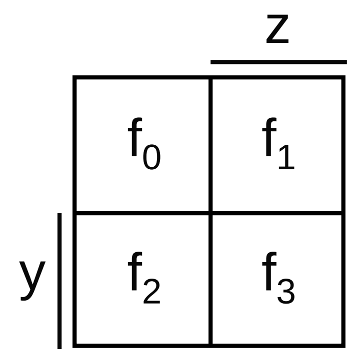
Literatuur

- Fundamentals of Digital Logic with VHDL Design 3rd Ed, S. Brown e.a.
- Contemporary Logic Design 2nd Ed, R.H. Katz e.a.
- Digitale Techniek Deel I, 5e druk, A.P. Thijssen e.a.
- Shannon's originele thesis (met Shannon-decompositie): http://www.cs.virginia.edu/~robins/Shannon_MS_Thesis.pdf
- Regels voor uitwerken Karnaughdiagrammen: http://www.ee.surrey.ac.uk/Projects/Labview/minimisation/karrules.html

Alternatieve vorm

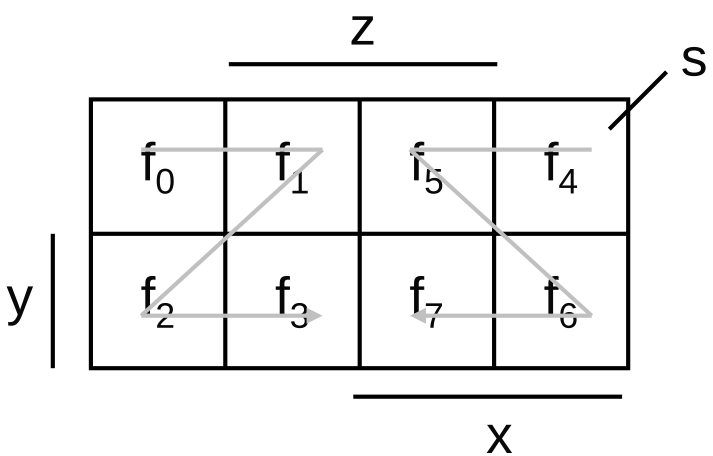
- Er is een alternatieve vorm mogelijk.
- De coderingen aan de randen worden dan vervangen door strepen met de bijbehorende variabele.
- Waar een streep staat is de bijbehorende variablele 1 in de minterm.
- Het ontbreken van een streep geeft aan waar de bijbehorende variabele 0 is in de minterm.
- Deze vorm komt voor in veel nederlandstalige boeken.

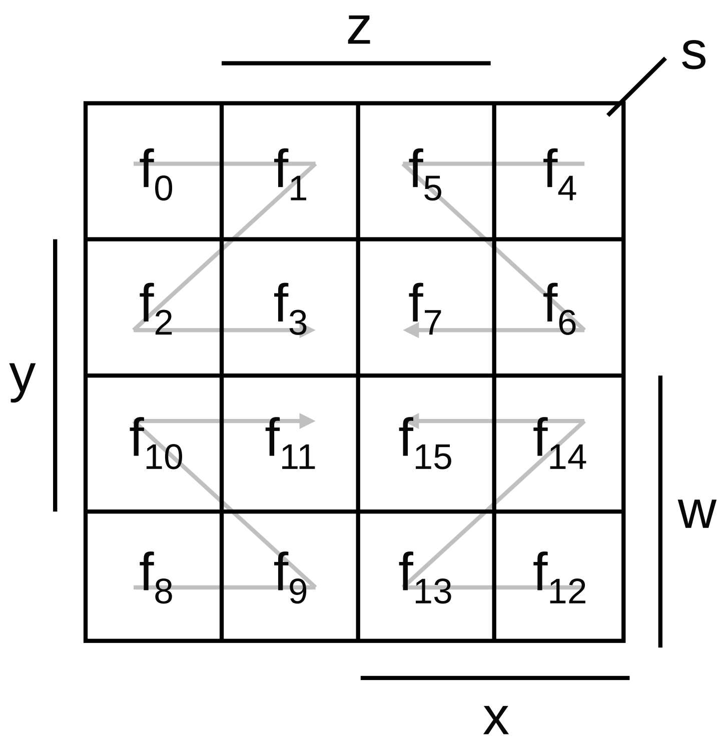
y	z	s
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3



Alternatieve vorm

- Hieronder zijn de Karnaughdiagrammen gegeven voor drie en vier variabelen.





Academie voor Technology, Innovation & Society Delft
Academie voor ICT & Media

De Haagse Hogeschool, Delft
+31-15-2606311
J.E.J.opdenBrouw@hhs.nl
www.dehaagsehogeschool.nl